《图与矩阵》习题

刘飞虎

首都师范大学 数学科学学院

2022 年 6 月

这本注记主要针对《Graphs and Matrices》(Author: R. B. Bapat) 的中文版《图与矩阵》(吴少川译) 所写。

下面内容分为两个部分，一个是《图与矩阵》的一些勘误，（是否正确还未知）均为在阅读过程中发现的；另一部分是此书的一些习题答案，但并不是完整答案。只是作为记录。

刘飞虎

首都师范大学

数学科学学院

部分勘误

1、P3 页，倒数第 6 行，余子式的定义应该是代数余子式。全书都是用的余子式。只是作者喜欢这样定义而已，也并不是错误，只是我更喜欢称其代数余子式。

2、P30 页，倒数 11 行，“奇数”应该为“偶数”。

3、P64 页，正数 10 行，$(x_i - x_j)^2$ 应为：$(x_i - x_j)$。

4、P78 页，正数 10 行，“引理 5.1”应为“定理 5.1”。

5、P82 页，正数 14 行，“由 F 导出的子图包含了一个割”应是“由 F 导出的子图不包含一个割”。

6、P84 页，正数 11 行 BB' 应为 B。

7、P91 页，第一行，且 H_1 不一定是 G 的连通的顶点导出子图。但 H_1 是 $V(H_1)$ 的顶点导出子图的一个连通的支撑子图。

8、P92 页，推论 6.10 的 (ii) 应该为：

$$\frac{1}{4m}\sum_{i=1}^{n}\sum_{i<j,j\sim i}\sqrt{d_i d_j} \leqslant \rho(G) \leqslant max_i\{\frac{1}{d_i}\sum_{j\sim i}\sqrt{d_i d_j}\}$$

或：

$$\frac{1}{2m}\sum_{i=1}^{n}\sum_{i<j}\sqrt{d_i d_j} \leqslant \rho(G) \leqslant max_i\{\frac{1}{d_i}\sum_{j\sim i}\sqrt{d_i d_j}\}$$

9、P92 页，定理 6.11 条件应该加上“连通”二字。

10、P93 页，式（6.8）的最后一个 $\leqslant$ 可以是严格的。

11、P93 页，式（6.8）的下一行应该有 6 个闭合途径。

12、P101 页，倒数第 6 行，应该为：$m_1 - m_2 = \dfrac{-k}{\sqrt{k-1}}$。

13、P117 页，正数 4 行“推论 7.10”应为：“推论 7.9”。

14、P140 页，倒数 6 行，$detL(T_1)$ 应为：$det(L(T_1) + E_{11})$。

15、P149 页，倒数第二行“L 的任何对称广义逆 H”。

16、P150 页，（9.3）式，分母为：$detL(j|j)$。

17、P183 页，正数第 5 行 $B = A - \varepsilon A$ 是部分半正定的。

18、P184 页，倒数第 5 行，$B[i,j|i,j]$ 的右上角矩阵位置处，应为 $(-1)^{i+j}A(j|i)$。

19、P185 页，（11.4）式中，$(-1)^n$。下面的 x_0 中为 $(-1)^{n-1}$。

20、P197 页，（12.9）式中，第一个求和式为：$\sum_{j=1}^{m}$。

21、P198 页，（12.10）式中，同样为 m。

22、P198 页，倒数第 10 行，推论 12.10 应为引理 12.9.

图与矩阵习题答案

1 第一章：预备知识

1、证明. 由 $Ax = 0$，显然可得 $A^{'}Ax = 0$。反之，如果 $A^{'}Ax = 0$，那么 $x^{'}A^{'}Ax = 0$。即 $(Ax)^{'}Ax = 0$。因此 $Ax = 0$. 故 A 与 $A^{'}$ 有相同的零空间。再由 $dimN(A) = dimN(A^{'}A)$，可得 $n - rankA = n - rankA^{'}A$。即：$rankA = rankA^{'}A$。 □

2、证明. 归纳法；如 $A = (A_{11})$ 则不等式显然成立。若 $A = \begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix}$ 则：

$$\begin{aligned} rankA &= rank(A_{11}, 0) + rank(A_{21}, A_{22}) \\ &\geq rank(A_{11}) + rank(A_{22}) \end{aligned}$$

（由于 A_{22} 中的每一列,都可由 (A_{21}, A_{22}) 中的每一列线性表示出,故 $rank(A_{22}) \leq rank(A_{21}, A_{22})$）现假设 $k-1$ 时,有不等式:$rankA \geq rankA_{11} + ... + rank_{A_{k-1,k-1}}$。现在讨论 k 时，则：

$$\begin{aligned} rankA = rank &\begin{pmatrix} A_{11} & 0 & ... & 0 \\ A_{21} & A_{22} & ... & 0 \\ . & . & ... & . \\ . & . & ... & . \\ . & . & ... & . \\ A_{k-1,1} & A_{k-1,2} & ... & A_{k-1,k-1} \end{pmatrix} + rank(A_{k1}, A_{k2}, ..., A_{kk}) \\ &\geq rankA_{11} + ... + rankA_{k-1,k-1} + rankA_{kk} \end{aligned}$$

若 $A_{ij} = 0$，则显然有:

$$rankA = rankA_{11} + rankA_{22} + ... + rankA_{kk}$$

证毕。 □

3、证明. 由 A 是正交矩阵，故 $AA^{'} = E$，即 $A^{'} = A^{-1}, |A| = \pm 1$。由于 $A^{-1} = \dfrac{A^*}{detA}$（$A^*$ 是 A 的伴随矩阵）。因此 $AA^* = detA \cdot E = \pm E$。故：

$$A^* = A^{-1}(\pm E) = A^{'}(\pm E)$$

可得：$A_{ij} = \pm a_{ij}$ 因此：$|a_{11}| = |detA(1|1)|$。 □

4、证明.（$\Leftarrow$）若 $G = A^{+}$，则有：

$$AGA = A \Rightarrow A^{'}G^{'}A^{'} = A^{'} \Rightarrow A^{'}(AG)^{'} = A^{'} \Rightarrow A^{'}AG = A^{'}$$

$$GAG = G \Rightarrow G^{'}A^{'}G^{'} = G^{'} \Rightarrow G^{'}(GA)^{'} = G^{'} \Rightarrow G^{'}GA = G^{'}$$

（$\Rightarrow$）若有 $A^{'}AG = A^{'}$ 与 $G^{'}GA = G^{'}$ 成立。由第 1 题知：$rankA^{'}A = rankA$。
(1): 于是对于某个矩阵 X，可以写为 $A = XA^{'}A$，则：

$$A = XA^{'}A = XA^{'}AGA = AGA$$

(2): 由 $A^{'}AG = A^{'}$，得：$G^{'}A^{'} = G^{'}A^{'}AG = (AG)^{'}AG$。于是:

$$(AG)^{'} = (AG)^{'}AG, AG = (AG)^{'}AG$$

故：$(AG)^{'} = G^{'}A^{'} = AG$，成立。
(3): 由 $G^{'}GA = G^{'}$，同理由 $rankGG^{'} = rankG$。得：$G = YG^{'}G$（某矩阵 Y）。于是：

$$G = YG^{'}G = YG^{'}GAG = GAG$$

(4): 同理可得 GA 是对称矩阵，即有 $(GA)^{'} = GA$。 □

另法. 知道 $(AG)' = AG, (GA)' = GA$ 后，

$$AGA = (AG)'A = G'A'A = (A'AG)' = (A')' = A$$

$$GAG = (GA)'G = A'G'G = (G'GA)' = (G')' = G$$

□

5、证明. 由 A 是一个秩为 1 的矩阵，则一定存在一行元素使得其它行的元素

都是它的倍数。不妨设：

$$A = \begin{pmatrix} x_1y_1 & x_1y_2 & ... & x_1y_n \\ x_2y_1 & x_2y_2 & ... & x_2y_n \\ . & . & ... & . \\ . & . & ... & . \\ . & . & ... & . \\ x_my_1 & x_my_2 & ... & x_my_n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_m \end{pmatrix} (y_1, y_2, ..., y_n)$$

$$= xy^{'} = BC$$

则上式为 A 的秩分解。有 1.3 节的讨论（P12 页），可知：

$$A^+ = C^+B^+$$

其中：$B^+ = (x^{'}x)^{-1}x^{'}, C^+ = y(y^{'}y)^{-1}$. 因此：

$$\begin{aligned} A^+ &= (y^{'}y)^{-1}(x^{'}x)^{-1}(xy^{'})^{'} \\ &= (y^{'}y)^{-1}(x^{'}x)^{-1}A^{'} \\ &= \frac{1}{\sum_{i=1}^n y_i^2}\frac{1}{\sum_{i=1}^m x_i^2}A^{'} \end{aligned}$$

因此，α 存在，且 α 为：

$$\alpha = \frac{1}{\sum_{i=1}^n y_i^2}\frac{1}{\sum_{i=1}^m x_i^2} = [trace(A^{'}A)]^{-1}$$

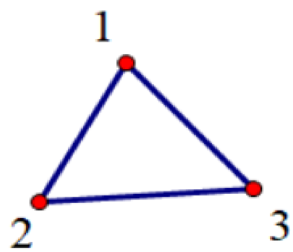
证毕。 □

2 第二章：关联矩阵

1、证明. 由于 B 是 Q 的一个 $k \times k$ 的非奇异子矩阵。故 B 中一定存在一个 $1, ..., k$ 的排列 σ，使得乘积 $b_{1\sigma(1)} \cdots b_{k\sigma(k)}$ 非零。由于 B 中的元素为 $0, 1, -1$，且每列元素均含有非零元。故 B 中有一列只有一个非零元，则可以删除此非零

元所在的行，所在的列。则得到的矩阵 B' 仍为非奇异子矩阵。若此矩阵 B' 存在两个排列使得 $b_{1\sigma(1)}\cdots b_{k\sigma(k)}$ 非零。则将矩阵 B' 所在行加至最后一行，得最后一行全为 0，与 B' 为非奇异矩阵矛盾。故存在且中存在一个排列 σ 满足条件。

对 $0-1$ 关联矩阵不一定成立。例如：下图：

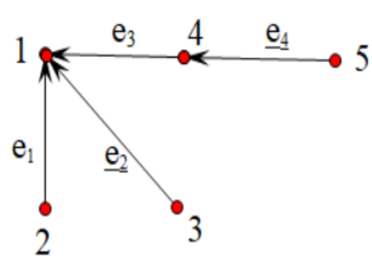


其中：

$$M=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&0&1\\0&1&1\end{pmatrix}$$

取 $B=M, |B|=|M|=-2$，但是 $\sigma_1=(213),\sigma_2=(132)$ 均满足条件。 $\square$

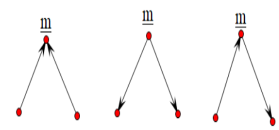
2、证明. 假设 $y_i=1, y_j=-1, y_k=0$，$k\neq i, k\neq j$，考虑一个 $(i\longrightarrow j)$ 的路径 P，设 x 是一个坐标由 $E(G)$ 索引的向量。如果 e_k 不在 P 中，那么设置 $x_k=0$，否则根据 e_k 的方向与 P 的方向相同或相反，分别设置 $x_k=1$ 或 $x_k=-1$。例如下图：



令 $i=3,j=5$，有：

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

现在验证 $Qx=y$：先看第 i 行，在路径 P 中与点 i 关联的边为 e_{*_1}，若方向指向 j，则 Q 中 $(i,*_1)$ 为 1。在向量 x 中 e_{*_1} 标记的元素为 1. 其他对应位置相乘为 0. 故在 y 中第 i 行元素为 1，若方向指向相反，同理为 $(-1)\times(-1)=$。同理第 j 行为 $1\times(-1)=-1$。再看其他行，若标记此行的点不在路径中，则显然在 y 中的结果为 0. 若在路径中，记为点 m，有三种情况：



简单分析可知，此三种情况的结果在 y 中均为 0. 得证。 □

3、解. $Q^+=Q^{'}(QQ^{'})^{-1}$，下验证：

$$Q\cdot Q^+\cdot Q=Q, Q^+\cdot Q\cdot Q^+=Q^+$$

$$(Q\cdot Q^+)^{'}=I=QQ^+, (Q^+\cdot Q)^{'}=I=Q^+Q$$

由 Q 是 K_n 的关联矩阵，故：

$$QQ^{'}=\begin{pmatrix} n-1 & -1 & ... & -1 \\ -1 & n-1 & ... & -1 \\ . & . & ... & . \\ . & . & ... & . \\ . & . & ... & . \\ -1 & -1 & ... & n-1 \end{pmatrix} = nI_n - J_n$$

（怎么求得的）?（未完........） □

4、证明. 反证，若 G 不是二部的，则图 G 存在一个奇数圈。现考虑对应于这个圈的 M 的子矩阵 $M^{'}$（$n\geq 3$）。则由引理 2.16. 有 $detM^{'}=2$，与 M 是全幺模的条件矛盾。 □

5、证明. 设 G 是二部图，并且二部为 (X,Y)；其中 $X=Y=\{1,2,...,n\}$，当且仅当 $a_{ij}=1$ 时，i 与 j 是相邻的，条件 (i) 等价于 $v(G)<n$。显然由于对任意排列 σ，$a_{1\sigma(1)}\cdots a_{n\sigma(n)}=0$，即都存在一个 $a_{i\sigma(i)}=0$。故条件 $(i)\Longleftrightarrow$ 匹配数 $v(G)<n\Longleftrightarrow\tau(G)=v(G)<n$。而由定点覆盖的含义：图 G 中每条边都与该顶点集合中的一个顶点相关联，且顶点个数最少。设在 X 中取了 x 个点，Y 中取了 y 个点，$\tau(G)=x+y<n$。则 $n+n-(x+y)>2n-n=n$ 故存在一个 $r\times s$ 阶零子矩阵，使得 $r+s=n+1$。反之，若存在 $r\times s$ 阶零子矩阵 $r+s=n+1$，则 $\tau(G)<n\Longleftrightarrow A$ 有一个 $r\times s$ 阶零子矩阵，其中 $r+s=n+1$。 □

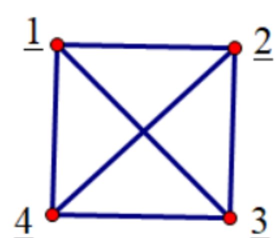
3 第三章：邻接矩阵

1、证明. 左图中存在一个点有 5 条关联的边，右图中不存在这样的点，故两图不同构。证明特征值相同：法 1：计算两个图的邻接矩阵，两个图的特征多项式为：$\lambda^6-7\lambda^4-4\lambda^3+7\lambda^2+4\lambda-1$ 计算特征值，比较即可。法 2：由定理 3.10：

$$\varphi_\lambda(A)=det(\lambda I-A)=\lambda^n+c_1\lambda^{n-1}+...+c_n$$

为图的特征多项式，$c_k=\sum(-1)^{c_1(H)+c(H)}2^{c(H)}$。其中求和式遍历图的具有 k 个顶点的所有初等子图。$c_1=0$。可求出所有 c_k。从而证明特征值相同。 □

2、证明. 如图：



$$H_1=\{12,34\},H_2=\{14,23\},H_3=\{13,24\}$$

$$H_4=\{12,23,34,14\},H_5=\{13,23,24,14\},H_6=\{12,34,13,24\}$$

故：$det(K_4)=3\cdot(-1)^{4-2}\cdot 2^0+3(-1)^{4-1}\cdot 2^1=3-6=-3.$ □

3、证明.

$$c_4=\sum(-1)^{c_1(H)+c(H)}2^{c(H)}=\sum_{H_1}(-1)^2+\sum_{H_2}(-1)^1 2=\sum_{H_1}1-2\sum_{H_2}1$$

其中求和历遍图 G 中具有 4 个顶点的所有初等子图，故若存在 H，如果 H 中存在圈，则为一个 4 圈，故 $c(H)=1$；如果 H 中不存在图，则 H 存在两条边，$c_1(H)=2$。且其中和式历遍 H_1 为所有 2 边初等子图，H_2 为所有 4− 圈；得证。 □

4、证明. 由平面图的相关知识：

1、平面图的色数 $\chi(G)\le 5$。

2、G 是连通平面图，那么 G 有一个度至多为 5 的顶点，$\Delta(G)\le 5$。

3、G 是平面的当且仅当 G 不含 K_{33} 或 K_5 的细分子图。

4、Hadwiger 猜想：色数满足 $\chi(G)\ge p$ 的连通图 G 能收缩到 K_p。等价的，如果 G 不能收缩到 K_p，则：$\chi(G)<p$。

5、Hadwiger 猜想对于 $p=5$ 时成立，当且仅当每个平面图有 4 着色。

由四色定理：（Wikipedia）如果在平面上划出一些邻接的有限区域，那么可以用四种颜色来染色，使得每两个邻接区域染色的颜色都不一样。（此定理由 Francis Guthrie 提出，1976 年 6 月在美国伊利诺斯大学的两台不同计算机上，用了 1200 个小时，做了 100 亿个判断，结果没有一张地图是需要五色的，最终证明了四色定理。）因此任何平面图都是四可着色，故 $\chi(G)\le 4$.

再由定理 3.23，若 G 至少含有一条边，则：

$$1-\frac{\lambda_1(G)}{\lambda_n(G)}\le\chi(G)\le 4$$

故由 $\lambda_n(G)\le 0$，由 P9 页，特征值交错可知

$$\frac{\lambda_1(G)}{\lambda_n(G)}\ge -3\Longrightarrow \lambda_1(G)\le -3\lambda_n(G)$$

如果 G 无边，则显然有：$\lambda_1(G)\le -3\lambda_n(G)$ 成立。 □

5、证明. 由 K_n 的特征值为 $(n-1),-1$，重数为 $1,n-1$。$K_{m,n}$ 的特征值为：$\sqrt{mn},-\sqrt{mn}$ 与 0. 重数为 $1,1,m+n-1$。故：

$$\epsilon(K_n)=\sum_{i=1}^{n}|\lambda_i|=n-1+(n-1)\cdot|-1|=2n-2$$

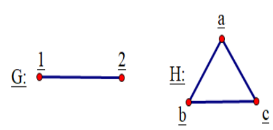
$$\epsilon(K_{m,n})=\sum_{i=1}^{n}|\lambda_i|=2\sqrt{mn}$$

由 K_n 的能量为 $2n-2$，故一个图的能量可以是任意正偶数。 □

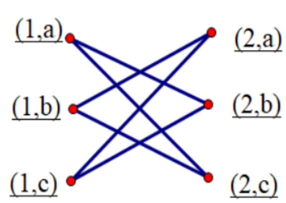
6、证明. 由 $A\otimes B$ 为矩阵的克罗内克积，令 A 为 $n\times n$，B 为 $m\times m$ 的矩阵。

$$A\otimes B=(a_{ij}B)=\begin{pmatrix} 0 & a_{12}B & a_{13}B & ... & a_{1n}B \\ a_{21}B & 0 & a_{23}B & ... & a_{2n}B \\ . & . & . & ... & . \\ . & . & . & ... & . \\ . & . & . & ... & . \\ a_{n1}B & a_{n2}B & a_{n3}B & ... & 0 \end{pmatrix}$$

由 $G\otimes H$ 的定义可知：$A\otimes B$ 为 $G\otimes H$ 的邻接矩阵。例如：



故 $G\otimes H$：



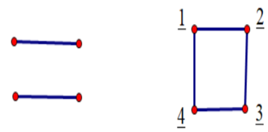
则 $G\otimes H$ 的邻接矩阵为：

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

由引理 3.25$A\otimes B$ 的特征值为 $\lambda_i\mu_j$，$i=1...n, j=1...m$。故：

$$\epsilon(G)\epsilon(H)=(\sum_{i=1}^{n}|\lambda_i|)(\sum_{j=1}^{m}|\mu_j|)=\sum_{i=1}^{mn}|\lambda_i\mu_j|=\epsilon(G\otimes H)$$

得证。 $\square$



7、证明. 由图 $K_2 \otimes K_2, C_4$ 的图分别为：

故由第 6 题中的定义，显然有：$G \otimes K_2 \otimes K_2$ 与 $G \otimes C_4$ 不同构。由 K_2 的特征值为 $\lambda = \pm 1$，故：

$$\varepsilon(K_2 \otimes K_2) = \varepsilon(K_2) \cdot \varepsilon(K_2) = 2 \cdot 2 = 4$$

由 C_4 的特征值为：$2cos\dfrac{2k\pi}{4}, k = 1, 2, 3, 4$，为 $0, -2, 0, -2$ 故：$\varepsilon(C_4) = 4$. 再由第 6 题结论得：$\varepsilon(G \otimes K_2 \otimes K_2) = 4\varepsilon(G) = \varepsilon(G \otimes C_4)$ 得证。 □

8、证明. 由：

$$A(G_1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \otimes A \quad A(G_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \otimes A$$

为矩阵克罗内克积，注意按本书的定义：$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ 并非一个图的邻接矩阵，故不可以直接使用第 6,7 题的结论。由：$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ 的特征值为 ± 1，$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ 的特征值为 $0, 2$。故由引理 $3.25A(G_1)$ 的特征值为 A 的特征值，与负的 A 的特征值。$A(G_2)$ 的特征值为 2 倍的 A 的特征值与 0. 因此：

$$\varepsilon(A(G_1)) = \sum 2|\text{A 的特征值}| = \varepsilon(A(G_2)) \tag{1}$$

得证。 □

9、证明. 设 n 是图 T 的一个悬挂顶点（叶子）并与 $n-1$ 相邻，假设对 $T \setminus \{n\}$ 的树，命题成立。则对：

$$A = \begin{pmatrix} & & & & * & 0 \\ & & & & * & 0 \\ & B & & & . & . \\ & & & & . & . \\ & & & & * & 0 \\ * & * & . & . & 0 & 1 \\ 0 & 0 & . & . & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad A(T \setminus \{n\}) = \begin{pmatrix} & & & & & * \\ & & & & & * \\ & B & & & & . \\ & & & & & . \\ & & & & & . \\ * & * & . & . & . & 0 \end{pmatrix}$$

由 $T\setminus\{n\}$ 是全幺模的，现观察 A，取 A 的任意一个方子阵。若此方子阵不含最后一行或不含最后一列中的位置，或是 $T\setminus\{n\}$ 的一个方子阵，则：此时显然是取行列式为 ±1 或 0。若此方阵含最后一行且含最后一列中的位置，且不是 $T\setminus\{n\}$ 的方子阵，此时的矩阵除取 0 外，必包含：$\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$ 部分位于矩阵的右下角，又 A 的最后一行最后一列均只有 1 个非 0 元素，故按这两个非 0 元素展开行列式，最后为 $(-1)^i$（$T\setminus\{n\}$ 的一个方子阵）结果仍为 ±1 或 0。得证。 □

4　第四章：拉普拉斯矩阵

1、证明.（法 1）设 $L(G)$ 的特征值为 $\lambda_1\geq\cdots\lambda_{n-1}\lambda_n=0$ 则由引理 4.5 得：$L+J$ 的特征值为：$\lambda_1\geq\cdots\lambda_{n-1}$ 与 n。故 $det(L+J)=n\cdot\lambda_1\cdots\lambda_{n-1}$，由定理 4.11 得：$G$ 的支撑树的数量为：

$$\frac{\lambda_1\cdots\lambda_{n-1}}{n}=\frac{n\cdot\lambda_1\cdots\lambda_{n-1}}{n^2}=\frac{det(L+J)}{n^2}$$

（法 2）反复运用拉普拉斯展开可以证明 $det(L+J)$ 等于 $detL$ 与 L 所有代数余子式之和。例如：

$$\begin{aligned}
det(L+J)&=\begin{bmatrix}a_{11}+1&a_{12}+1&a_{13}+1\\a_{21}+1&a_{22}+1&a_{23}+1\\a_{31}+1&a_{32}+1&a_{33}+1\end{bmatrix}\\
&=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}+1&a_{22}+1&a_{23}+1\\a_{31}+1&a_{32}+1&a_{33}+1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&1&1\\a_{21}+1&a_{22}+1&a_{23}+1\\a_{31}+1&a_{32}+1&a_{33}+1\end{bmatrix}\\
&=\ldots\\
&=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&1&1\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\1&1&1\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{bmatrix}\\
&\quad+\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\1&1&1\end{bmatrix}
\end{aligned}$$

由于 $detL=0$，故 $det(L+J)=L$ 所有代数余子式之和。

（法 3）见引理 8.3，使用定理 4.8（未证） □

2、证明. 设图 G,H 的邻接矩阵为 $A_{n\times n},B_{m\times m}$，$G\times H$ 的邻接矩阵为 $A\otimes I_m+I_n\otimes B$。则：

$$L(G)=D(G)-A(G)=D(G)-A$$

$$L(H)=D(H)-A(H)=D(H)-B$$

$$\begin{aligned}L(G\times H)&=D(G\times H)-(A\otimes I_m+I_n\otimes B)\\&=(D(G)\otimes I_m+I_n\otimes D(H))-(A\otimes I_m+I_n\otimes B)\\&\text{ 图中每个顶点的度等于此顶点两个分量的点在原图中的度之和}\\&=(D(G)-A)\otimes I_m+I_n(D(H)-B)\\&=L(G)\otimes I_m+I_n\otimes L(H)\end{aligned}$$

设 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 与 $\mu_1,\cdots,\mu_m$ 分别是 $L(G)$ 与 $L(H)$ 的特征值，那么由引理 3.24.$L(G\times H)$ 的特征值是 $\lambda_i+\mu_j$（$i=1...n;j=1...m$）。 □

3、证明. 设 $L(G)$ 的特征值为 $\lambda_1\geq\cdots\geq\lambda_{n-1}\geq\lambda_n=0$，故由图 G 有 m 条边得：

$$\sum_{i=1}^{n-1}\lambda_i=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i=\text{所有点的度之和}=2m \tag{2}$$

由定理 4.11 得：$\kappa(G)=\dfrac{\lambda_1\cdots\lambda_{n-1}}{n}$ 由不等式：$\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_i\geq\sqrt[n]{a_1\cdots a_n}$ 得：

$$\kappa(G)=\frac{1}{n}\lambda_1\cdots\lambda_{n-1}\leq\frac{1}{n}(\frac{\sum_{i=1}^{n-1}\lambda_i}{n-1})^{n-1}=\frac{1}{n}(\frac{2m}{n-1})^{n-1}$$

得证。 □

4、证明. 由定理 4.13，$\lambda_1\leq max\{d_i+d_j-c(i,j):1\leq i<j\leq n,i\sim j\}$。$d_i$ 为顶点的度。$c(i,j)$ 是与 i 和 j 都相邻的顶点的数量。故，显然：

$$\lambda_1\leq max\{d_i+d_j-c(i,j):1\leq i<j\leq n,i\sim j\}\leq n$$

□

5、证明. 由边拉普拉斯矩阵 K 的定义，若 K 为一个非负矩阵，则图 G 的定向中不存在首尾相连的边，由树 T 是一个二部图，故 $T=X\cup Y$，令所有边从 X 指向 Y，即可不会出现首尾相连的边，此时 K 是一个非负矩阵。
(注：对任意二部图，这样构造得到的 K 均是非负矩阵)。 □

6、证明. • 证明 $(A^{'})^{+} = (A^{+})^{'}$ 验证 $(A^{+})^{'}$ 满足 $A^{'}$ 的 Moore-Penrose 逆定义。
（1）$A^{'}(A^{+})^{'}A^{'} = (A^{+}A)^{'}A^{'} = (AA^{+}A)^{'} = A^{'}$
（2）$(A^{+})^{'}A^{'}(A^{+})^{'} = (A^{+}AA^{+})^{'} = (A^{+})^{'}$
（3）$(A^{'}(A^{+})^{'})^{'} = A^{+}A = (A^{+}A)^{'} = A^{'}(A^{+})^{'}$
（4）$((A^{+})^{'}A^{'})^{'} = AA^{+} = (AA^{+})^{'} = (A^{+})^{'}A^{'}$

• 由 $A^{+}AA^{'} = (A^{+}A)^{'}A^{'} = A^{'}(A^{+})^{'}A^{'} = (AA^{+}A)^{'} = A^{'}$ 现在验证 $(A^{'})^{+}A^{+}$ 是 $AA^{'}$ 的 Moore-Penrose 逆。
（1）$AA^{'}(A^{'})^{+}A^{+}AA^{'} = AA^{'}(A^{+})^{'}A^{+}AA^{'} = AA^{'}(A^{+})^{'}A^{'} = A(AA^{+}A)^{'} = AA^{'}$
（2）$(A^{'})^{+}A^{+}AA^{'}(A^{'})^{+}A^{+} = (A^{'})^{+}A^{'}(A^{'})^{+}A^{+} = (A^{+}AA^{+})^{'}A^{+} = (A^{+})^{'}A^{+} = (A^{'})^{+}A^{+}$
（3）$(AA^{'}(A^{'})^{+}A^{+})^{'} = (A^{+})^{'}A^{+}AA^{'} = (A^{+})^{'}A^{'} = (AA^{+})^{'} = AA^{+} = (A^{'})^{'}A^{+} = (A^{+}AA^{'})^{'}A^{+} = AA^{'}(A^{'})^{+}A^{+}$
（4）$((A^{'})^{+}A^{+}AA^{'})^{'} = AA^{'}(A^{+})^{'}A^{+} = (A^{+}AA^{'})^{'}A^{+} = AA^{+} = (AA^{+})^{'} = (A^{+})^{'}A^{'} = (A^{+})^{'}A^{+}AA^{'} = (A^{'})^{+}A^{+}AA^{'}$ □

5 第五章：圈与割

1、证明. 由 $B = [I, B_f], C = [C_f, I]$ 及 $B_f = -C^{'}_f$。得：

$$\begin{bmatrix} B \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & B_f \\ -B^{'}_f & I \end{bmatrix}$$

故由 Schur 补公式可得：$det \begin{bmatrix} B \\ C \end{bmatrix} = det[I + B^{'}_f B_f]$ 由矩阵 $B^{'}_f B_f$ 为对称矩阵，其对角线元素全正。且每一行中对角线元素大于非对角线元素的绝对值之和。显然 $I + B^{'}_f B_f$ 为主对角占优矩阵，且是严格主对角占优矩阵。故 $det[I + B^{'}_f B_f] \neq 0$。得证。 □

2、证明（未证完）. 由题意，设 B 是基本割矩阵，故 B 的行向量构成了 G 的割子空间的基，而：

$$X^{'} = \begin{bmatrix} (X^{1})^{'} \\ . \\ . \\ . \\ (X^{n-1})^{'} \end{bmatrix}$$

的行是割的关联向量，是 $X^1,...,X^{n-1}$ 线性独立，故存在 $(n-1)\times(n-1)$ 的非奇异矩阵 Z，使得 $X^{'}=ZB$，而矩阵 B 是全幺模的。要证明 X 所有非 $0(n-1)\times(n-1)$ 子式相等，只需说明 B 的所有非 $0(n-1)\times(n-1)$ 子式相等。........................... □

3、证明. 与定理 5.13 的证明同理。令 $|E|=k$，由柯西-比内公式，有：

$$detCC^{'}[E|E]=\sum_{F\subset E(G),|F|=k}(detC[E|F])^2$$

其中 $C[E|F]$ 表示由 E 中的行和 F 中的列来进行索引的 C 的子矩阵。注意到 $C[E(T)^c|E(T)^c]$ 为单位矩阵。因此，当且仅当 $C[E(T)^c|F\cup E^c]$ 是非奇异的；$C[E|F]$ 才是非奇异的。此时由引理 5.12.$detC[E|F]=\pm1$，再由引理 5.9 得：当且仅当 $F\cup E^c$ 构成一个 G 的余树时，$C[E(T)^c|F\cup E^c]$ 才是非奇异的。故由第二行得到的式子得证。 □

4、证明. 由定理 5.13，$detBB^{'}[E(T_1)|E(T_1)]$ 等于把 $E(T_1)^c$ 扩展成 G 的支撑树的方法数，故也是 G 中包含子树 T_1 的支撑树的数量。（1）

由定理 4.7，$detL(V(T_1)|V(T_1))$ 等于 G 中含有 $\#V(T_1)$ 个分支的支撑森林的数量。其中每一个分支都包含了 $\#V(T_1)$ 中的一个顶点。（2）

显然（1）与（2）之间是一个一一对应的关系，故得证。 □

5、待证. 一个图 G 是连通平面图，且 G^* 是它的对偶图，则 G^* 很容易有自环与重边。$Q(G^*)$ 的定义是否要作修正？可以参考《代数组合论》stanley 著，辛国策、周岳译。$P154$ 页，定理 11.17. □

6 第六章：正则图

1、证明. 设 A 是 G 的邻接矩阵，并假设 $u\geq0$，满足 $Au=\mu u$，存在 $x>0$ 使得 $Ax=\rho(G)x$，现考虑 $u^{'}Ax$ 得：

$$u^{'}Ax=u^{'}\rho(G)x=\rho(G)u^{'}x$$

$$u^{'}Ax=u^{'}A^{'}x=(Au)^{'}x=\mu u^{'}x$$

故：$\mu=\rho(G)$ 得证。 □

2、证明. 反证法，若 G 是有圈的，假设存在一个圈在 G 中为 $H=C_m$。则由定理 3.6，可得 $\rho(H)=2$，再由定理 6.6，H 是 G 的一个子图。则 $\rho(G)\geq\rho(H)=2$，矛盾，因此，G 一定是无圈的。若存在一个顶点的度是 4，则 G 存在子图

$H \leq G, H = K_{1,4}$。由定理 3.4，可得 $\rho(H) = \sqrt{1 \cdot 4} = 2$，在由定理 6.6，可得 $\rho(G) \geq \rho(H) = 2$，矛盾。因此 G 的任何一个顶点的度最多是 3.
（需不需要说明，3 是可以取到的？不过我想这样的例子应该有很多。） □

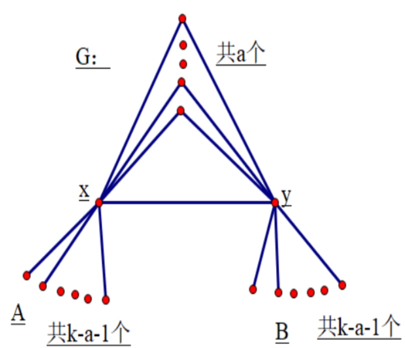
3、证明. 设 G_1 的特征值为 $k_1 = \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_{n_1}$ G_2 的特征值为 $k_2 = \mu_1, \mu_2, ..., \mu_{n_2}$ 故 G_1^c 的特征值为：$n_1 - 1 - \lambda_1, -1 - \lambda_2, ..., -1 - \lambda_{n_1}$，$G_2^c$ 的特征值为：$n_1 - 1 - \mu_1, -1 - \mu_2, ..., -1 - \mu_{n_2}$. 由 $G_1^c \cup G_2^c$ 的特征值为 G_1^c 与 G_2^c 的特征值的并，设 $G_1^c \cup G_2^c$ 的邻接矩阵为 A。则：$A + \overline{A} = J - I$，$J - I$ 的特征值为 $n_1 + n_2 - 1$，与 -1。（注 $G_1 + G_2$ 不一定是正则的。）而 $(G_1^c \cup G_2^c)^c$ 中 G_1^c 所在子图中的顶点有 n_1 个，度 $n_2 + k_1$，另一半有 n_2 个顶点，度为 $n_1 + k_2$。
若 $G_1 + G_2$ 是正则的，即 $n_2 + k_1 = n_1 + k_2$，此时有 $G_1 + G_2$ 的特征值为：$n_2 + \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_{n_1}, \mu_1 - n_2, \mu_2, ..., \mu_{n_2}$。故：

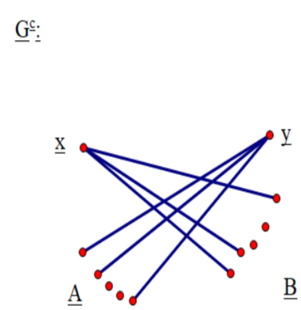
$$\begin{aligned}\frac{\varphi(G_1 + G_2, \lambda)}{\varphi(G_1, \lambda)\varphi(G_2, \lambda)} &= \frac{(\lambda - n_2 - \lambda_1)(\lambda + n_2 - \mu_1)}{(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \mu_1)}|_{\lambda_1 = k_1, \mu_1 = k_2} \\ &= \frac{\lambda^2 - (k_1 + k_2)\lambda + k_1 k_2 - n_1 n_2}{(\lambda - k_1)(\lambda - k_2)}\end{aligned}$$

若 $G_1 + G_2$ 非正则，怎么证明？ □

4、证明. 由图 G 是一个强正则图，G^c 是由 K_n 中去掉 G 中的边而形成的图，故若 G 的参数为 (n, k, a, c)，则 G^c 也是 n 个点的正则图。其中每个点的度为：$n - k - 1$（显然）。

现在考虑 G^c 中两个点 x, y 不相邻，则：x, y 在 G 中相连，如下图：

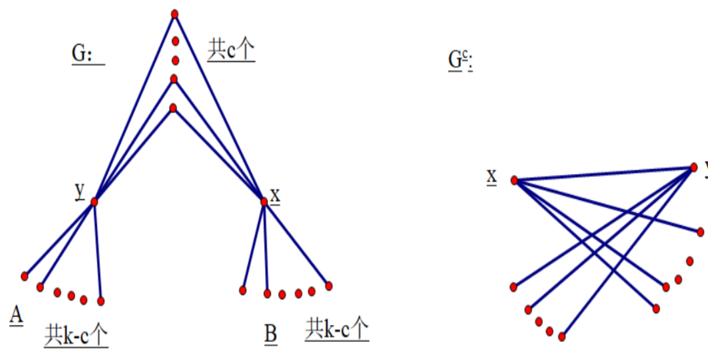




由 x 与 y 有 a 个共同相邻顶点，故与 x 相邻的不与 y 相邻的顶点为 $k-a-1$ 个。如图 $\#A = \#B = k-a-1$，且 A 与 B 中顶点无交集，否则 x 与 y 就会有多于 a 个顶点共同相邻。此时在 G^c 中 x 与 B 中每个点相连，y 与 A 中每个点相连。

由点 x,y 的度为 $n-k-1$，故 x,y 在 G^c 中至多有 $n-k-1-(k-a-1)=n-2k+a$ 个点相连。再由，若这 $n-2k+a$ 个点中有一个点 z 与 x 不相连，则在 G 中 z 与 x 相连。故此点必在集合 B 中，这不允许，故在 G^c 中任意两个不相邻顶点有 $n-2k+a$ 个共同的相邻顶点。

同理，若 x 与 y 在 G^c 中相邻，则 x 与 y 在 G 中不相连，如下图：



故得 x 与 y 在 G^c 中有：$n-k-1-(k-c+1)=n-2k+c-2$ 个共同的相邻顶点。

故 G^c 是强正则的，其参数为 $(n,n-k-1,n-2k+c-2,n-2k+a)$ $\square$

5、**证明.** 由图 G 是一个 $k-$ 正则图，故图 G 的边 $m=\dfrac{nk}{2}$，由定理 6.25，代入 m 可得：$\varepsilon(G)\le k+\sqrt{k(n-1)(n-k)}$，由 $\varepsilon(K_n)=\sum_{i=1}^{n}|\lambda_i|=2n-2$。故只需证明：$(k+\sqrt{k(n-1)(n-k)})|_{k=3}\le 2n-2$ 即可，（$n\ge 3$）
等价于证明：$\sqrt{3(n-1)(n-3)}\le 2n-5$，
等价于证明：$n^2-8n+16\ge 0$。显然成立。
故：$\varepsilon(G)\le\varepsilon(K_n)$。得证。 $\square$

6、**证明.** 设 $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n$ 是 A 的特征值，由 A 是非奇异的，故特征值非 0，由不等式：$(\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n})^n\ge a_1a_2\cdots a_n$，得：

$$\sum_{i=1}^{n}|\lambda_i|\ge n\prod_{i=1}^{n}|\lambda_i|^{\frac{1}{n}}=n|detA|^{\frac{1}{n}}\ge n$$

（由 A 是图 G 的邻接矩阵，故 A 中的元素为 0 与 1，显然若 A 非奇异，$|detA|\ge 1$） $\square$

7 第七章：代数连通度

1、证明. 由星形图 $K_{1,n-1}$ 的关联矩阵为：

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & ... & 1 \\ 1 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 1 & 0 & 0 & ... & 0 \\ . & 0 & 0 & ... & 0 \\ . & 0 & 0 & ... & 0 \\ 1 & 0 & 0 & ... & 0 \end{pmatrix}$$

故 $K_{1,n-1}$ 的拉普拉斯矩阵为：

$$A = \begin{pmatrix} n-1 & -1 & -1 & ... & -1 \\ -1 & 1 & 0 & ... & 0 \\ -1 & 0 & 1 & ... & 0 \\ . & 0 & 0 & ... & 0 \\ . & 0 & 0 & ... & 0 \\ -1 & 0 & 0 & ... & 1 \end{pmatrix}$$

故 L 有一个主子阵为 I_{n-1}，故 $L - I_n$ 的秩为 2，故 $L - I_n$ 的零化度为 $n-2$，因此 1 是 L 的重数为 $n-2$ 的一个特征值，而 L 显然有 0 特征值。再由 $trL = 2n-2 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$，因此剩余一个特征值为 n，故星形图 $K_{1,n-1}$ 的代数连通度为 1. □

2、待证. □

3、待证. □

4、证明. 设 μ 是 P_n 的代数连通度，n 为奇数，且 x 为 fiedler 向量，令 $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$。则 $Lx = \mu x$。且由对称性，可知 $y = (-x_n, -x_{n-1}, ..., -x_1)$ 也是 L 的一个对应于 μ 的特征向量。

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & ... & 0 \\ -1 & 2 & -1 & ... & 0 \\ 0 & -1 & 2 & ... & 0 \\ . & 0 & 0 & ... & 0 \\ . & 0 & 0 & ... & -1 \\ 0 & 0 & 0 & ... & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & ... & 0 \\ -1 & 2 & -1 & ... & 0 \\ 0 & -1 & 2 & ... & 0 \\ . & 0 & 0 & ... & 0 \\ . & 0 & 0 & ... & -1 \\ 0 & 0 & 0 & ... & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -x_n \\ -x_{n-1} \\ . \\ . \\ . \\ -x_1 \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} -x_n \\ -x_{n-1} \\ . \\ . \\ . \\ -x_1 \end{pmatrix}$$

因此 $x+y$ 是 L 的一个 fiedler 向量。而 $x+y$ 的中心的顶点值为 0，故此顶点是一个特征顶点。 □

5、证明. 由定理 7.16 显然可得：

$$\mu \leq \frac{1}{d(V_1,V_2)^2}(\frac{1}{|V_1|}+\frac{1}{|V_2|})(|E(G)|-|E(G_1)|-|E(G_2)|)$$

得：

$$(|E(G)|-|E(G_1)|-|E(G_2)|) \geq \frac{\mu m}{2}$$

而对 Q_n 而言，Q_n 是 Q_2 的 n 重笛卡尔乘积。由第 4 章习题 2 可得：

$$L(G\times H) = L(G)\otimes I_n + I_n \otimes L(H)$$

若 $L(G)$ 与 $L(H)$ 的特征值为：$\lambda_1,...,\lambda_n$ 和 $\mu_1,...,\mu_m$，则 $L(G\times H)$ 的特征值为 $\lambda_i+\mu_j, i=1,2,...,n$; $j=1,2,...,m$ 对 $L(Q)$ 而言，

$$L(Q) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$
\begin{bmatrix}
\lambda-2 & 1 & 0 & 1\\
1 & \lambda-2 & 1 & 0\\
0 & 1 & \lambda-2 & 1\\
1 & 0 & 1 & \lambda-2
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
\lambda-2 & 1 & 0 & 1\\
0 & \lambda-2 & 0 & 2-\lambda\\
0 & 1 & \lambda-2 & 1\\
1 & 0 & 1 & \lambda-2
\end{bmatrix}
$$

$$
\begin{aligned}
&= (\lambda-2)\begin{bmatrix}
\lambda-2 & 0 & 2-\lambda\\
1 & \lambda-2 & 1\\
0 & 1 & \lambda-2
\end{bmatrix}
-
\begin{bmatrix}
1 & 0 & 1\\
\lambda-2 & 0 & 2-\lambda\\
1 & \lambda-2 & 1
\end{bmatrix}\\
&= (\lambda-2)(\lambda-2)((\lambda-2)^2-1)-(\lambda-2)^2+(\lambda-2)(2-\lambda-\lambda+2)\\
&= (\lambda-2)^2((\lambda-2)^2-2)-2(\lambda-2)^2\\
&= (\lambda-2)^2(\lambda^2-4\lambda)\\
&= \lambda(\lambda-2)^2(\lambda-4)
\end{aligned}
$$

（$L(Q_2)$ 的特征值为 0,2,2,4）因此 $L(Q)$ 的代数连通度为 2. 故现在要证对 Q_n 而言共 2^n 个端点存在 V_1, V_2，使得 $|V_1| = |V_2| = 2^{n-1}$，且 G 中一个端点在 V_1 中而令一个端点在 V_2 中的边的数目为：$\dfrac{\mu m}{2} = 2^{n-1}$。而这是对于 Q_n 显然可以做到，使对 Q_3 而言为立方体，令 V_1 是立方体上面四个顶点，V_2 为立方体下面四个顶点即可。而对 Q_n 可令 Q_n 中顶点记为 n 长的 $0,1$ 序列（在 Z_n 中）$V(Q_n) = Z_2^n$. 令：

$$|V_1| = \{(0, x_2, ..., x_n)|x_i = 0, 1 \quad i = 2 \sim n\}$$

$$|V_2| = \{(1, x_2, ..., x_n)|x_i = 0, 1 \quad i = 2 \sim n\}$$

即可。 □

6、证明（未证完）. 设 $f : V(G) \longrightarrow \{0, 1, -1\}$ 定义为：在 V_1 上时等于 0，在 V_2 上时等于 1，在 V_3 上时等于-1，显然有 $f^{'}1 = 0$，故由引理 4.3 的命题 (iii) 可知：

$$f^{'}Lf = \sum_{i\sim j}(f(i) - f(j))^2$$

当 i 和 j 都在 V_1 或都在 V_2 或都在 V_3 中时，$(f(i) - f(j))^2 = 0$ 设一个端点在 V_1 中，一个端点在 V_2 中的边的数目为 m_1; 一个端点在 V_1 中，一个端点在 V_3 中的边的数目为 m_2; 一个端点在 V_2 中，一个端点在 V_3 中的边的数目为 m_3。故：

$$f^{'}Lf = m_1 + m_2 + m_3$$

再由引理 7.15 得：

$$f^{'}Lf \geq \mu f^{'}f = 2\mu f =$$

故：

$$\frac{1}{2}m_1 + \frac{1}{2}m_2 + 2m_3 \geq \mu m$$

因此：(.................) □

7、证明. 由 $V(G)|V_1$ 导出的图不连通。故 $V(G)|V_1$ 的代数连通度为 0，再由定理 7.20 得：$\mu \leq |V_1|$ 显然成立。 □

8、证明. 设点 x 是图 G 中具有最小顶点度 m，即点 x 与 m 条边相连。令 V_1 是与点 x 相邻的这 m 条边的另一个端点的顶点集。因此 $V(G) \setminus V_1$ 显然不连通，由习题 7 得：$\mu \leq |V_1| = m$ 得证。 □

9、证明. 设 $f_i = (n+1) - 2i, i = 1, 2, ..., n$。注意到 $f^{'}1 = 0$，再应用式（7.17）：

$$\mu f^{'}f \leq f^{'}Lf = \sum_{i \sim j}(f(i) - f(j))^2 = 2^2 + 2^2(n-2) + 2^2 = 4n$$

而：

$$\begin{aligned} f^{'}f &= (n-1)^2 + (n-3)^2 + (n-5)^2 + ... + (3-n)^2 + (1-n)^2 \\ &= 2((n-1)^2 + (n-3)^2 + ...) \\ &= \begin{cases} 2((n-1)^2 + (n-3)^3 + ... + 2^2) \ for \quad n : odd \\ 2(n-1)^2 + (n-3)^3 + ... + 1^2 \ for \quad n : even \end{cases} \\ &= \begin{cases} \dfrac{n(n-1)(n+1)}{3} \ for \quad n : odd \\ \dfrac{n(n+1)(n-1)}{3} \ for \quad n : even \end{cases} \end{aligned}$$

注：平方和公式：

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

连续偶数平方和：

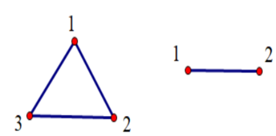
$$
\begin{aligned}
&2^2+4^2+\cdots+(n-3)^2+(n-1)^2\\
&=2^2+4^2+\cdots(2\cdot\frac{n-3}{2})^2+(2\cdot\frac{n-1}{2})^2\\
&=4(1^2+2^2+3^2\cdots+(\frac{n-1}{2})^2)\\
&=4\cdot\frac{\frac{n-1}{2}(\frac{n-1}{2}+1)(n-1+1)}{6}\\
&=\frac{n(n-1)(n+1)}{6}
\end{aligned}
$$

连续奇数平方和:

$$
\begin{aligned}
&1^2+3^2+\cdots+(n-3)^2+(n-1)^2\\
&=1^2+3^2+\cdots(n-3)^2+(2\cdot\frac{n}{2}-1)^2\\
&=[1^2+2^2+3^2+\cdots+(2\cdot\frac{n}{2})^2]-[2^2+4^2+\cdots(2\cdot\frac{n}{2})^2]\\
&=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-\frac{n(n+2)(n+1)}{6}\\
&=\frac{n(n+1)(n-1)}{6}
\end{aligned}
$$

故：$\mu\le\frac{4n\cdot 3}{n(n+1)(n-1)}=\frac{12}{n^2-1}$ □

10、证明. 不一定。当一个连通图中去掉一个顶点后，变为非连通图，其代数连通度显然会下降。但也不一定所有图去掉一个顶点后，其代数连通度会下降。例如：



$$
L_1=\begin{pmatrix}2&-1&-1\\-1&2&-1\\-1&-1&2\end{pmatrix}
$$

$$
L_1=\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix}
$$

L_1 的特征值为 0,1,3.L_2 的特征值为 0,2.L_1 的代数连通度下于 L_2 的代数连通度。 □

8 第八章：树的距离矩阵

1、证明. 类似于定理 8.2，对顶点重新编号后可以假设顶点 n 是一个悬挂顶点且相邻于顶点 $n-1$，且 $n-1$ 与 n 之间边为 e_{n-1}，注意：$d(i,n)=d(i,n-1)+w_{n-1},(i=1,2,...,n-1)$。在 D 中，从第 n 列中减去第 $n-1$ 列，并从第 n 行中减去第 $n-1$ 行，把得到的矩阵称为矩阵 D_1，除元素 (n,n) 是 $-2w_{n-1}$ 外，D_1 的最后一行，最后一列的所有元素都是 w_{n-1}。对顶点 $1,2,...,n-1$ 重新编号，使得 $n-1$ 是悬挂顶点且相邻于点 $n-2$，通过置换 D_1 的行和列可以得到一个矩阵，在这个矩阵中从第 $n-1$ 列减去第 $n-2$ 列。并从第 $n-1$ 行减去第 $n-2$ 行。不断重复这种方法得到如下矩阵：

$$D_2=\begin{pmatrix} 0 & w_1 & w_2 & \cdots & w_{n-1} \\ w_1 & -2w_1 & 0 & \cdots & 0 \\ w_2 & 0 & -2w_2 & \cdots & 0 \\ . & . & . & \cdots & . \\ . & . & . & \cdots & . \\ w_{n-1} & 0 & 0 & \cdots & -2w_{n-1} \end{pmatrix}$$

故 $detD=detD_2$ 通过行列式 Schur 补公式得：

$$\begin{aligned} detD_2 &= (-2)^{n-1}\prod_{i=1}^{n-1}w_i\times(w_1,w_2,...,w_{n-1})\begin{pmatrix} \frac{1}{2}w_1^{-1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}w_2^{-1} & 0 & \cdots & 0 \\ . & . & . & \cdots & . \\ . & . & . & \cdots & . \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{2}w_n^{-1} \end{pmatrix}(w_1,w_2,...,w_{n-1})' \\ &= (-2)^{n-1}\prod_{i=1}^{n-1}w_i\times\frac{1}{2}(\sum_{i=1}^{n-1}w_i) \\ &= (-1)^{n-1}2^{n-2}(\sum_{i=1}^{n-1}w_i)\prod_{i=1}^{n-1}w_i \end{aligned}$$

□

2、待证. 同第一题证明过程，或定理 8.2 证明过程。 □

3、证明. 若 $\alpha \neq 0$，则考虑行列式：

$$\begin{bmatrix} -D & 1 \\ 1^{'} & \dfrac{1}{\alpha} \end{bmatrix}$$

由 Schur 补公式得：

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} -D & 1 \\ 1^{'} & \dfrac{1}{\alpha} \end{bmatrix} &= det(-D)det(\frac{1}{\alpha} + 1^{'}D^{-1}1) \\
&= (-1)^{n-1}det(D)(\frac{1}{\alpha} + 1^{'}D^{-1}1) \\
&= \frac{1}{\alpha}det(-D - 1(\frac{1}{\alpha})^{-1}1^{'}) \\
&= \frac{1}{\alpha}det(-D - \alpha J) \\
&= (-1)^{n-1}\frac{1}{\alpha}det(D + \alpha J)
\end{aligned}$$

故得：$det(D + \alpha J) = \alpha \cdot det(D) \cdot (\frac{1}{\alpha} + 1^{'}D^{-1}1)$ 由引理 8.7$D\tau = (n-1)1$，故 $\frac{1}{n-1}\tau = D^{-1}1$. 故：$\frac{1}{n-1}1^{'}\tau = 1^{'}D^{-1}1$ 由引理 8.6：$1^{'}\tau = 2$，故 $\frac{2}{n-2} = 1^{'}D^{-1}1$。从而的：

$$\begin{aligned}
det(D + \alpha J) &= det(D) \cdot (1 + \frac{2\alpha}{n-1}) \\
&= (-1)^{n-1}(n-1)2^{n-2} + (-1)^{n-1}2^{n-1}\alpha
\end{aligned}$$

若 $\alpha = 0$，由定理 8.2，$det(D) = (-1)^{n-1}(n-1)2^{n-2}$ 显然成立。 $\square$

4、证明. 由：

$$
\begin{aligned}
&(D^{-1}-L)\cdot\frac{1}{3}(D+(n-1)J)\\
&=\frac{1}{3}(D^{-1}D+(n-1)D^{-1}J-LD-(n-1)LJ)\\
&=\frac{1}{3}(I+(n-1)D^{-1}J+2I-\tau 1^{'}-(n-1)LJ) \quad \text{引理 } 8.8\\
&=\frac{1}{3}(3I+(n-1)D^{-1}J-\tau 1^{'}-(n-1)LJ) \quad \text{定理 } 8.9\\
&=\frac{1}{3}(3I+(n-1)(-\frac{1}{2}LJ+\frac{1}{2(n-1)}\tau\tau^{'}J)-\tau 1^{'}-(n-1)LJ)\\
&=\frac{1}{3}(3I-\frac{3(n-1)}{2}LJ+\frac{1}{2}\tau\tau^{'}J-\tau 1^{'})\\
&=\frac{1}{3}(3I+\frac{1}{2}\tau\tau^{'}J-\tau 1^{'}) \quad \text{引理 } 8.6\\
&=\frac{1}{3}(3I+\frac{1}{2}\tau(2,2,...,2)-\tau 1^{'}) \qquad (1^{\tau}=2)\\
&=I
\end{aligned}
$$

□

5、证明. 假设对于某个向量 x，有 $(D^{-1}-S)x=0$，方程两边左乘 $1^{'}$，并对 D^{-1} 使用定理 8.9 得：$1^{'}(-\frac{1}{2}L+\frac{1}{2(n-1)}\tau\tau^{'}-S)x=0$，再由 $1^{'}\tau=2$。使得 $\frac{1}{n-1}\tau^{'}x=0$ 得：$\tau^{'}x=0$。因此：$(-\frac{1}{2}L-S)x=0$，其中 L 是 T 的拉普拉斯矩阵。那么：$x^{'}(-\frac{1}{2}L-S)x=0$，对于 $\frac{1}{2}L+S$ 是半正定的，（L,S 均为拉普拉斯矩阵，由定理 4.3 得）故:

$$\frac{1}{2}x^{'}Lx+x^{'}Sx=0$$

由引理 4.3 的 (iii) 得：$x=0$。故 $(D^{-1}-S)$ 的零空间为 0，因此 $D^{-1}-S$ 是非奇异的。 □

6、待证. □

9 第九章：电阻距离

1、待证. □

2、证明. 由引理 9.9 有：

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j\sim i}r(i,j)=2(n-1)$$

而 C_n 是圈，由对称性得：

$$\sum_{j\sim i} r(i,j) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j\sim i} r(i,j) = \frac{2}{n}(n-1) = 2-\frac{2}{n}$$

□

3、证明. 若不是存在唯一顶点 i,j 路径，则 i,j 路径中存在一个圈，由串并联电路的知识，并联会使电阻减小，且减少任意一个参与并联的电阻块，故会有：$r(i,j) < d(i,j)$，矛盾。故存在唯一的 $i-j$ 路径。 □

4、待证（未证）？. 由定理 9.12 可知，如果 x 是一个与 τ 正交的 $n\times 1$ 向量，则有：$x^{'}Rx \leq 0$ □

5、证明. 由割顶点的定义，当图 $G\setminus\{k\}$ 时，会有至少两个连通分支，其中点 i,j 分别在不同的连通分支中，故任意从 i 到 j 的路途必经过点 k。故由串联电路的知识有：

$$r(i,j) = r(i,k) + r(k,j)$$

□

6、证明. 使用式（9.3）和定理 4.7，由式（9.3）得：

$$r(i,j) = \frac{detL(i,j|i,j)}{detL(j,j)}$$

再由定理 4.7 及 G 是连通图，$detL(i,j) = \kappa(G)$，$detL(i,j|i,j)$ 为含有 2 个分支的支撑森林的数量，其中每个分支都包含了 i 或 j 的一个顶点，故 $detL(i,j|i,j) = \kappa^{'}(G)$，故:

$$r(i,j) = \frac{\kappa^{'}(G)}{\kappa(G)}$$

□

7、待证. □

8、证明. 见引理 9.9. 已证。 □

9、待证. □

10、待证. □

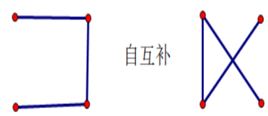
10 第十章：阈图的拉普拉斯特征值

1、待证. □

2、证明. 使用一个二进制序列 $b_1, ..., b_n$，其中 $b_1 = 1$，来对阈图进行编码，在获得该图的递归过程中，如果 $b_i = 0$，那么就加入一个孤立顶点，如果 $b_i = 1$ 就加入一个支配顶点，因此一个二进制序列 $b_1...b_n(b_1 = 1)$ 的数量为 2^{n-1} 个，故具有 n 个顶点的非同构阈图的数量是 2^{n-1}。 □

3、待证. □

4、待证. □



5、证明. 可以用递归的方法来检查一个图是否为余图。采用 G 的补图。则它将被分裂成连通分支，其中每个分支均为一个余图。因此，如果采用 G^c 的分支，并重复取补图的过程。那么如果这个图是一个余图，必然将会在孤立顶点时停止这一过程。因为 P_4 是自补的，所以 P_4 的存在将不会导致这种情况发生。附带地，已知不含有 P_4 作为一个导出子图是余图的一个特性。

□

6、证明. 设 L 为分裂图的拉普拉斯矩阵，则：令 $d = |V_1| + |V_2| - 1 = n - 1, m = |V_1|, a = |V_2|$ 故：

$$L = \begin{pmatrix} nI - J & -J \\ -J & mI \end{pmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
|\lambda I - J| &= \begin{bmatrix} \lambda I - nI + J & J \\ J & (\lambda - m)I \end{bmatrix} \\
&= (\lambda - m)^{|V_2|} det((\lambda I - nI + J)_{m\times a} - J((\lambda - m)I)^{-1} J_{a\times m}) \\
&= (\lambda - m)^{a} det(((\lambda - n)I + J)_{m\times m} - \frac{a}{\lambda - m} J_{m\times m}) \\
&= (\lambda - m)^{a} det((\lambda - n)I + \frac{\lambda - m - a}{\lambda - m} J)_{m\times m} \\
&= (\lambda - m)^{a} (\lambda - n)^{m-1} (\lambda - n + m \cdot \frac{\lambda - m - a}{\lambda - m}) \\
&\quad \text{由引理 4.4 得：} |aI + bJ| = a^{n-1}(a + nb) \\
&= (\lambda - m)^{a} (\lambda - n)^{m-1} ((\lambda - n)(\lambda - m) + m\lambda - m^2 - am) \\
&= (\lambda - m)^{a} (\lambda - n)^{m} \lambda \quad (mn = m(m + a))
\end{aligned}
$$

因此分裂图的拉普拉斯特征值为：n（重数 $|V_1|$），$|V_1|$（重数 $|V_2| - 1$），与 0.

或，由图 G 是一个阈图，其 G 的度序列是：$|V_1|$ 个 $n-1$，$|V_2|$ 个 $|V_1|$ 故由定理 10.8 可得：$L(G)$ 的特征值为：n（重数 $|V_1|$），$|V_1|$（重数 $|V_2| - 1$），与 0.

现考虑 $K_m \setminus G, m \geq n$.

当 $m = n$ 时，$K_m \setminus G$ 是不连通的，故此时 $K_m \setminus G$ 的支撑树数量为 0。

当 $m > n$ 时，$K_m \setminus G$ 可以看作是一个阈图，其度序列为：$m - n$ 个 $m - 1$，$|V_1|$ 个 $m - n$，及 $|V_2|$ 个 $m - |V_1| - 1$。

故由定理 10.8 可得 $K_m \setminus G$ 的特征值为：$m - n$ 个 m，$|V_2| - 1$ 个 $m - |V_1|$，$|V_1|$ 个 $m - n$，及 0. 因此由矩阵—树定理得：$K_m \setminus G$ 中的支撑树的数量为：

$$
\frac{m^{m-n-1}(m - |V_1|)^{|V_2|-1}(m - n)^{|V_1|}}{m} = m^{m-n-1}(m - |V_1|)^{|V_2|-1}(m - n)^{|V_1|}
$$

□

7、待证. □

8、证明. 由 $K_n \times K_2$（P50 页定义）(由习题 5)：取补仍是连通图，故 $K_n \times K_2$ 不是余图。由 K_2 的拉普拉斯特征值为 $2, 0$。K_n 的拉普拉斯特征值为 n（$n - 1$ 重），0（1 重）。由第四章习题 2，得 $K_n \times K_2$ 的拉普拉斯特征值为：$n + 2$（$n - 1$ 重），n（$n - 1$ 重），2（1 重），0（1 重）。故 $K_n \times K_2$ 是一个拉普拉斯整数图。 □

11 第十一章：正定完备问题

1、证明. 当且仅当一个图的二部补有一个尺寸为 k 的匹配时，这个图才是秩为 k 的可完备化图。

证明类似于定理 11.2 的证明过程：首先假设 G^c 有一个尺寸为 k 的匹配，并不失一般性假设它由边 $(R_i, C_{\sigma(i)}), i = 1, 2, ..., k$ 决定的，σ 是一个 k 排列，令 A 为一个 G— 部分矩阵，令 A 的 $(R_i, C_{\sigma(i)})-$ 元素为 $x, i = 1, 2, ..., k$，并令其余未被定义的元素为 0，可以获得一个矩阵 $A(x)$，那么 $A(x)$ 存在一个 $k \times k$ 的子式 $B(x)$，$det(B(x))$ 是关于 x 的 n 阶多项式，其首项为 $\pm x^n$，因此对于 x 的某个值，$detB(x)$ 非零，所以 $B(x)$ 是非奇异的，从而可知 G 是一个秩为 k 的可完备化图。

反之，假设 G^c 没有尺寸为 k 的匹配，那么根据 Koning-Egervary 定理，G^c 有一个尺寸小于 k 的顶点覆盖。不失一般性，设形成 G^c 顶点覆盖的顶点为 $R_1, ..., R_h$ 和 $C_1, ..., C_s$，其中 $h + s < k$，令 A 为 $m \times m$ 部分矩阵，其中只要 R_i 与 C_j 在 G 中相邻，就有 $a_{i,j} = 0$，那么由 A 的行 $h + 1, ..., m$ 和列 $s + 1, ..., n$ 所组成的子矩阵是 0，令 B 为 A 的任意一个秩为 k 的完备。设矩阵 C 为 B 的一个 $k \times k$ 的子式，则显然 $detC = 0$，因此 G 不是秩至少为 k 的矩阵。 □

2、证明. 由弦图的定义，不含有一个作为导出子图的 k 个顶点的圈 C_k（$k \geq 4$）或对任意 C_k（$k \geq 4$）有一个弦。显然可知分裂图 G 是弦图，由分裂图的定义，可知分裂图的补图仍是分裂图，故 G 和 G^c 都是弦图。 □

3、证明. 例：$G = C_4$ 不是弦图，设 A 为 C_4 的一个部分正定阵：

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & ? & 0 \\ 1 & 3 & 1 & ? \\ ? & 1 & 3 & 1 \\ 0 & ? & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

取 ? 全为 0，可知 A 为正定矩阵。故矩阵 A 存在一个正定完备。 □

4、证明. 由第 3 题而来，稍作调整：

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & ? & 0 \\ 1 & 3 & 1 & ? \\ ? & 1 & 3 & 1 \\ 0 & ? & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

为部分正定矩阵。当：

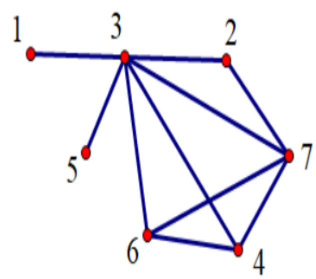
$$B=\begin{pmatrix}5&1&0&0\\1&3&1&0\\0&1&3&1\\0&0&1&4\end{pmatrix}$$

时，B 为正定矩阵。当：

$$C=\begin{pmatrix}5&1&0&1\\1&3&1&0\\0&1&3&1\\1&0&1&4\end{pmatrix}$$

时，C 为正定矩阵。 □

5、证明. 设 G 是一个具有顶点集 $V(G)=\{1,2,...,7\}$ 的图，当且仅当 $a_{ij}\neq 0$ 时，才有 $i\sim j$ 那么 G 如下：



因此 G 是一个弦图。且 G 的完美消除序列为 $1,2,4,5,6,7,3$ 按照这个顺序，使用主元的高斯消去法，首先，从其他行减去第 1 行合适倍数来将除 $(1,1)-$ 元素外的第一列的所有元素减为 0，然后，从剩余列中减去第 1 列的合适倍数来将除 $(1,1)-$ 元素外的第 1 列的所有元素减为 0。在第 2 行和第 2 列上重复上述过程，然后是第 4 行和第 4 列，等等。在这个过程中，没有 0 元素将会被变为非 0 元素。

（猜测：这也是完美消除序列名称的由来）。 □

6、证明. 利用雅可比恒等式：由于 A 为 $n\times n$ 正交矩阵，故 $A\cdot A^T=I$，$detA=\pm1$，即：$A^{-1}=A^T$。由 $P184$ 页公式：

$$detB[S|T]=\frac{detA(T|S)}{detA}$$

得：

$$detA^{-1}[S|T] = detA^T[S|T] = \frac{detA(T|S)}{detA} = \pm detA(T|S)$$

由此得出：$detA[T|S] = \pm detA(T|S)$ 得证。 □

12 第十二章：基于图的矩阵博弈

1、待证. □

2、证明. 由引理 12.6，选手 I 与 II 有相同的最优化策略集，在由定理 12.15 有：

$$dim(Opt_I(A)) = |S| - rankB - 1$$

反对称矩阵的秩为偶数（结论），$B = A[S|S]$ 是反对称矩阵，故 $dim(Opt_I(A))$ 与 $|S|$ 有相反的奇偶性。

（题有没有问题?） □

3、证明. 最优策略集由在 P_n 中的向量组成，其中 P_n 是在 A 的零空间中，由于每一个纯策略都是基本策略，故令 $S = A$，由定理 12.15 得：

$$\begin{aligned} dim(Opt_I A) &= dim(Opt_{II}(A)) \\ &= nullity(A) - 1 \\ &= \#A - rankA - 1 \\ &= n - 1 - rankA \end{aligned}$$

□

4、证明. 由定理 12.18，得只需证明：$\sum_v \rho(v) \leq \dfrac{m(m-1)}{2}$ 即可，但是当三个顶点两条边时：

（图）

$\sum_v \rho(v) = 3 \leq \dfrac{2(2-1)}{2} = 1$

（题有没有问题? 还是我理解错了?） □

5、证明. 对于图 12.3 有关联矩阵 Q 为：

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

由于 G 有一个有向圈故 $V(Q)=0$ 对于选手 I:

$$x=(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3},0)^{'}\text{时有：} x^{'}Q=(0,0,0,0)$$

$$x=(\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4})\text{时有：} xQ=(0,0,0,0)$$

故选手 I 有不止 1 个最优策略。 $\square$