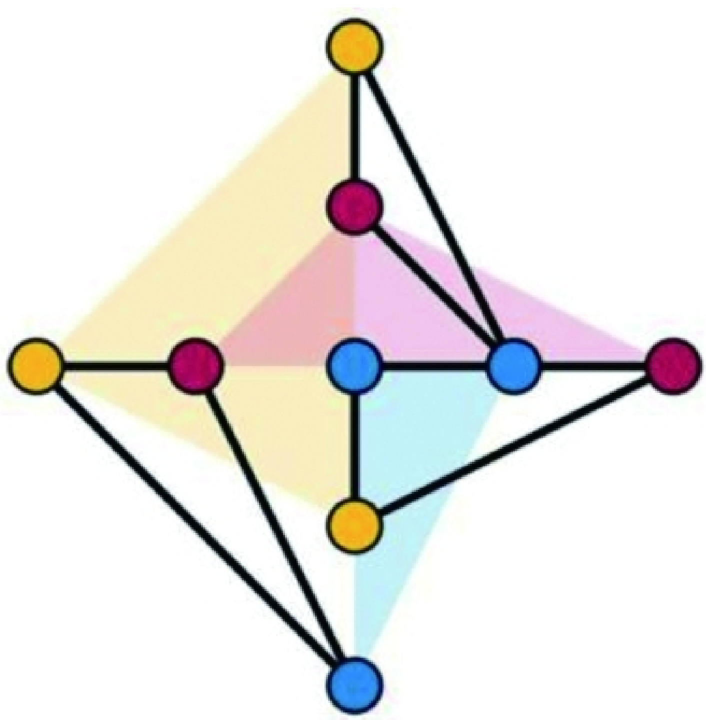
代数组合论答案

刘飞虎

首都师范大学 数学科学学院

2024 年 7 月



序（一）

此答案编写于 2021 年夏，是针对 Richard P. Stanley 著的《Algebraic Combinatorics》的第一版中文版（由辛国策、周岳译）所写，因作者能力有限，只给出了此书部分答案；本书所有错误，均由作者的个人原因造成。如读者发现本书中的不恰当之处及未给出的习题答案，非常希望可以告知作者（邮箱：feihu.liu@foxmail.com），不胜感激。

在编写过程中，同门尤洋洋给出了部分习题更巧妙的解答，舍友朱晨对 Latex 的排版提供了很多帮助，辛国策老师也在课堂上纠正了很多答案，在此向他们表示感谢。

突然想起《秦时明月》中鬼谷先生的一段话：寻求答案就是等于让他人来帮你做选择，而你放弃了自己的选择，为了获得老师的赞赏而寻求的答案，那么老师的高度就限制了你的视野，为了寻求世人的认同而寻求的答案，那么世人，就会在你身边围起一道道高墙，寻求答案，能重复先辈上一次的正确，但是，永远无法走出一条新路，也永远无法走出一条自己的路；未解的题目遍存于乱世；我们的鬼谷之道，就是要给世界，创造答案。

刘飞虎
2021 年 8 月

序（二）

2024 年春，师门每周组织讨论班，讲解 R. P. Stanley 著的《Algebraic Combinatorics: Walks, Trees, Tableaux, and More》每章的主要内容，也涉及部分习题。参与讲解讨论的还有师兄张子豪；师姐徐欣雨，张晨；师弟渠梦豪，陶思豪。他 (她) 们也对部分习题给出了修改意见。辛国策老师亦指出了部分问题。向他 (她) 们表示感谢。暑假期间，作者修正了部分答案。虽然作者已在尽量完善此答案，但时间仓促，疏漏之处仍在所难免，敬请读者不吝赐教，不胜感激。

此答案只是针对 Stanley 的《Algebraic Combinatorics》第一版所写。关于第二版的更多信息，请参考 Stanley 的主页：https://math.mit.edu/ rstan/.

2024 年恰逢 Stanley 的 80 岁诞辰。于此，向前辈致敬！

刘飞虎

2024 年 7 月

邮箱：feihu.liu@foxmail.com

目录

1 第一章 图的游动

1、法一：记从某个顶点出发到其他某个顶点的长为 l 的游动的条数为 A_l，闭游动的条数为 B_l。则由某顶点开始的长为 l 的游动的所有条数为：

$$(p-1)^l = (p-1)A_l + B_l.$$

另一方面有：

$$\begin{aligned} B_{l+1} - A_{l+1} &= (p-1)A_l - ((p-2)A_l + B_l) \\ &= A_l - B_l = -(B_l - A_l) \\ &= (-1)^l (B_1 - A_1) = (-1)^{l+1}. \end{aligned}$$

因此有 $B_l - A_l = (-1)^l \Rightarrow A_l = B_l - (-1)^l$ 将此式与第一个式子联立可推出：

$$(p-1)^l = (p-1)B_l - (p-1)(-1)^l + B_l.$$

进一步化简可得

$$B_l = \frac{1}{p}((p-1)^l + (p-1)(-1)^l).$$

法二：利用递推公式，设 $i \to i$ 长为 n 闭游动的条数为 F_n，而 $i \to j(i \neq j)$ 长为 n 的游动为 G_n，于是有 $F_0 = 1$，$G_0 = 0$，$F_1 = 0$，$G_1 = 1$，$F_2 = p-1$，$G_2 = p-2$. 由

$$\begin{cases} F_n = (p-1)G_{n-1} \\ G_n = (p-2)G_{n-1} + F_{n-1}. \end{cases} \tag{1}$$

由上式可得：

$$\begin{cases} F_{n-1} = (p-1)G_{n-2} \\ F_{n-1} = G_n - (p-2)G_{n-2}. \end{cases} \tag{2}$$

由上式可推出关于 G_n 的递推关系：$G_n - (p-1)G_{n-2} - (p-2)G_{n-1} = 0$. 此递推关系为线性其次的，由其特征方程为：$x^2 - (p-2)x - (p-1) = 0$. 解得 $x_1 = p-1, x_2 = -1$ 因此可知 $G_n = c_1(p-1)^n + c_2(-1)^n$, 其中 c_1, c_2 为待定系数。再由：

$\begin{cases} G_0 = 0 \\ G_1 = 1. \end{cases}$ 代入上式可得 $\begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ (p-1)c_1 - c_2 = 1. \end{cases}$ 于是 $c_1 = \frac{1}{p}, c_2 = \frac{1}{-p}$.

因此

$$G_n = \frac{1}{p}((p-1)^n - (-1)^n).$$

$$F_n=(p-1)G_{n-1}=\frac{1}{p}((p-1)^n+(-1)^n(p-1)).$$

法三：根据题目中的组合意义，考虑由数 $1,2,3,4,...,p$ 构成的序列 $(i_1,i_2,...,i_l,i_{l+1})$ 的个数，其中 $i_1=i, i_{l+1}=i$ 且序列中的任意两个相邻数都不同，于是 $i_l\neq i_1$，记此序列的个数为 B_l。记 A_l 为序列 $(i_1,i_2,...,i_l,i_{l+1})$ 的个数，其中 $i_1=i, i_{l+1}\neq i$，此时 i_{l+1} 可以取除 i 外的其余 $p-1$ 个值。现在，当 $i_1=i$ 时，i_2 有 $p-1$ 种选择方案，i_2 有 $p-1$ 种选择方案，以此类推。可得：$(p-1)^l=B_l+(p-1)A_l$。另一方面有：$B_{l+1}-A_{l+1}=(p-1)A_l-((p-2)A_l+B_l)=(-1)^{l+1}$。同法一，可得：$B_l=\frac{1}{p}((p-1)^l+(p-1)(-1)^l)$。

2、(题中第一个括号有误，应为：即使该顶点处已有自环）由推论 1.3 得：$f_G(l)=\lambda_1^l+\lambda_2^l+...+\lambda_p^l=8^l+2\cdot 3^l+3\cdot(-1)^l+(-6)^l+5$ 由于 $p=15$ 得图 G 的特征值为：$8,3,3,-1,-1,-1,-6,1,1,1,1,1,0,0,0$ 图 G 的邻接矩阵为 M，则 $M+I$ 为图 G' 的邻接矩阵，故 G' 的特征值为 $9,4,4,0,0,0,-5,2,2,2,2,2,1,1,1$ 因此 $f_{G'}(l)=9^l+2\cdot 4^l+(-5)^l+5\cdot 2^l+3$。

3、法一：由顶点二部划分 (A,B) 的二部图 G 的定义可知：（当 l 为奇数时）图 G 长为 l 的游动，如果从 A 中的顶点出发，最终会落入 B 中；如果从 B 中的顶点出发，最终会落入 A 中。故当考虑闭游动时，$f_G(l)=\lambda_1^l+\lambda_2^l+...+\lambda_p^l=0$，其中 $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_p$ 为 G 的特征值。

（生成函数法）设 $f(n)$ 表示图 G 长为 n 的闭游动的条数。则显然有 $f(2k)>0, f(2k+1)=0$。设 $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_p$ 为图 G 的特征值，故有：$f(n)=\lambda_1^n+\lambda_2^n+...+\lambda_p^n$。故考虑 $f(n)$ 的生成函数有：

$$F(x)=\sum_{n\geqslant 0}f(n)x^n=\sum_{i=1}^{p}\sum_{n\geqslant 0}\lambda_i^n x^n=\sum_{i=1}^{p}\frac{1}{1-\lambda_i x}.$$

又由于当 n 为奇数时，$f(n)=\lambda_1^n+\lambda_2^n+...+\lambda_p^n=0$ 得

$$\sum_{k\geqslant 0}f(2k+1)x^{2k+1}=\frac{1}{2}(\sum_{n\geqslant 0}f(n)x^n-\sum_{n\geqslant 0}f(n)(-x)^n)=0.$$

由上式可得：

$$\frac{1}{2}(F(x)-F(-x))=0,$$

$$\sum_{i=1}^{p}\frac{1}{1-\lambda_i x}=\sum_{i=1}^{p}\frac{1}{1+\lambda_i x}.$$

现在利用引理 1.7 的证明，对任意的 n, 均有下式成立：

$$\lambda_1^n+\lambda_2^n+\cdots+\lambda_p^n=(-\lambda_1)^n+(-\lambda_2)^n+\cdots+(-\lambda_p)^n.$$

（当 n 是偶数时显然成立，当 n 是奇数时为 0）。于是，得 $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_p$ 是 $-\lambda_1, -\lambda_2, ..., -\lambda_p$ 的重排。

在用一下递归，例如当 λ^n 出现在左侧时，$(-\lambda)^n$ 一定出现在右侧，因为重排的缘故，此时左侧一定有 $(-\lambda)^n$，右侧一定有 λ^n。现在左右两边同时删去 λ^n 与 $(-\lambda)^n$，这是一对正负出现的特征值。递归的。可得二部图 G 中的非零特征值成对 $\pm\lambda$ 出现。

（注：例如 $1, -1, 4, -4$ 是 $-1, 1, -4, 4$ 的重排）

法二：（邻接矩阵法）由顶点二部划分 (A, B) 的二部图 G 的定义可知，邻接矩阵为：

$$A(G) = \begin{pmatrix} 0 & M_{r\times s} \\ M_{s\times r}^t & 0 \end{pmatrix}.$$

其中，A 中含有 r 个点，B 中含有 s 个点，M 是 $r \times s$ 阶矩阵。现在考虑特征多项式：

$$\begin{aligned} f(x) &= det\left(\begin{pmatrix} 0 & M_{r\times s} \\ M_{s\times r}^t & 0 \end{pmatrix} - xI\right) \\ &= det\begin{pmatrix} -xI & M_{r\times s} \\ M_{s\times r}^t & -xI \end{pmatrix} \\ &= det\begin{pmatrix} -xI & M_{r\times s} \\ 0 & \frac{1}{x}M^tM - xI \end{pmatrix} \\ &= |-xI_{r\times r}| \cdot |\frac{1}{x}M^tM - xI_{s\times s}| \\ &= (-x)^r \cdot \frac{1}{x^s}|M^tM - x^2 I_{s\times s}|. \end{aligned}$$

其中，I 表示单位矩阵，上式第二个等号来自行变换，即：第一行乘 $\frac{1}{x}M^t$ 后加至第二行。由于 $|M^tM - x^2I_{s\times s}|$ 显然是一个偶函数，当 r, s 均为偶数，或者均为奇数时，图 G 有 $r+s$ 共偶数个顶点，此时观察上式可知：$f(x) = g(x^2)$；当 r, s 为一个奇数，一个偶数时，图 G 有 $r+s$ 共奇数个顶点，此时有 $f(x) = xg(x^2)$，其中 $g(x)$ 是某个多项式；得证。

4、(a) 由 3 题可知。当 l 为奇数时，$f_G(l) = 0$，下考虑当 l 为偶数时：设 u 为二部图的左顶点之一，v 为二部图的右顶点之一，从点 u 出发长为 l 的闭游动的个数为

$$srsr\cdots srs\cdot 1 = s^{\frac{l}{2}} r^{\frac{l}{2}-1},$$

从点 v 出发长为 l 的闭游动的个数为

$$rsrs\cdots rsr\cdot 1 = r^{\frac{l}{2}} s^{\frac{l}{2}-1}.$$

此时，

$$f_G(l) = s^{\frac{l}{2}} r^{\frac{l}{2}-1} \cdot r + r^{\frac{l}{2}} s^{\frac{l}{2}-1} \cdot s = 2 s^{\frac{l}{2}} r^{\frac{l}{2}}.$$

(b) 由 3 题及 (a) 可知：

$$\begin{aligned} f_G(l) &= \lambda_1^l + (-\lambda_1)^l + \lambda_2^l + (-\lambda_2)^l + ... + \lambda_m^l + (-\lambda_m)^l \\ &= \begin{cases} 0 & for \quad l : odd \\ 2(\sqrt{rs})^l = (\sqrt{rs})^l + (-\sqrt{rs})^l & for \quad l : even. \end{cases} \end{aligned}$$

因此 K_{rs} 的特征值为 $\sqrt{rs}, -\sqrt{rs}$ 及 $r+s-2$ 个 0。

5、(法一：有问题，直接看法二) 考虑 H_n 的邻接矩阵的平方 $A(H_n)^2$ 得：

$$\begin{aligned} f_{H_n}(2) &= (n-1) + (n-1) + ... + (n-1) \\ &= 2n(n-1) = (n-1)^2 + (n-1)^2 + 2n - 2 \\ &= (n-1)^2 + (n-1)^2 + 2(n-1). \end{aligned}$$

上式要对所有的 n 都成立。因此

$$\begin{aligned} f_{H_n}(2) &= \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \cdots \lambda_n^2 + (-\lambda_1)^2 + (-\lambda_2)^2 + \cdots + (-\lambda_n)^2 \\ &= (n-1)^2 + (1-n)^2 + 1^2 + (-1)^2 + 1^2 + (-1)^2 + ... + 1^2 + (-1)^2. \end{aligned}$$

由第三题可知特征值为 $1(n-1$ 重)，$-1(n-1$ 重)，$n-1(1$ 重)，$1-n(1$ 重)。

(法二：) 我们考虑二部图 H_n 的邻接矩阵 $A(H_n)$。

$$A(H_n) = \begin{pmatrix} 0 & J-I \\ J-I & 0 \end{pmatrix}.$$

$$A(H_n)^2 = \begin{pmatrix} (J-I)^2 & 0 \\ 0 & (J-I)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (n-2)J+I & 0 \\ 0 & (n-2)J+I \end{pmatrix}.$$

由习题 3，我们有如下特征多项式：

$$\begin{aligned} f(x) &= (-x)^r \cdot \frac{1}{x^s} |M^t M - x^2 I_{s\times s}| \\ &= (-1)^n |M^t M - x^2 I_{n\times n}|, \end{aligned}$$

其中 $M=J-I$ 且 $M^tM=M^2=(n-2)J+I$. 因此：

$$
\begin{aligned}
f(x) &= (-1)^n|(n-2)J+I-x^2I_{n\times n}| \\
&= (-1)^n \begin{bmatrix} n-1-x^2 & n-2 & ... & n-2 \\ n-2 & n-1-x^2 & ... & n-2 \\ . & . & ... & . \\ . & . & ... & . \\ . & . & ... & . \\ n-2 & n-2 & ... & n-1-x^2 \end{bmatrix} \\
&= (-1)^n \begin{bmatrix} n-1-x^2+(n-1)(n-2) & n-2 & ... & n-2 \\ n-1-x^2+(n-1)(n-2) & n-1-x^2 & ... & n-2 \\ . & . & ... & . \\ . & . & ... & . \\ . & . & ... & . \\ n-1-x^2+(n-1)(n-2) & n-2 & ... & n-1-x^2 \end{bmatrix} \\
&= (-1)^n \begin{bmatrix} (n-1)^2-x^2 & n-2 & ... & n-2 \\ 0 & 1-x^2 & ... & 0 \\ . & . & ... & . \\ . & . & ... & . \\ . & . & ... & . \\ 0 & 0 & ... & 1-x^2 \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

由 $f(x)=0$，可得 H_n 的特征值为：1 ($n-1$ 重)，-1 ($n-1$ 重)，$n-1$ (1 重)，$1-n$ (1 重)。

（法三：利用全 1 矩阵的特征值）二部图 H_n 的邻接矩阵 $A(H_n)$。

$$
A(H_n)=\begin{pmatrix} 0 & J-I \\ J-I & 0 \end{pmatrix}.
$$

$$
\begin{aligned}
f(x) &= (-x)^r\cdot\frac{1}{x^s}|M^tM-x^2I_{s\times s}| \\
&= (-1)^n|M^tM-x^2I_{n\times n}|,
\end{aligned}
$$

其中 $M=J-I$ 且 $M^tM=M^2=(n-2)J+I$. 由于 J 的特征值是 n（重数是 1）和 0（重数是 $n-1$）。因此 $(n-2)J+I$ 的特征值是 $(n-2)n+1$（重数是 1）和 1（重数是 $n-1$）。因此，我们有 $x^2=(n-2)n+1=(n-1)^2$ 和 $x^2=1$。因此：H_n 的特征值为：1 ($n-1$ 重)，-1 ($n-1$ 重)，$n-1$ (1 重)，$1-n$ (1 重)。

6、(a) 先计算序列 $V_0, V_1, ..., V_l$ 的个数,其中存在顶点依次为 $v_0, v_1, ..., v_l = v_0$ 的闭游动，且满足 $v_j \in V_j$，由推论 1.6 括号中的计数得，上述序列的个数为：$n^{l-1} \cdot \frac{1}{p}((p-1)^l + (p-1)(-1)^l)$，而 $|V_1| = |V_2| = ... = |V_{l-1}| = n$，对给定的完全图中，取出一条闭游动，则此闭游动的方向固定。故：

$$\begin{aligned} f_{K_{n,p}}(l) &= np \cdot n^{l-1} \cdot \frac{1}{p}((p-1)^l + (p-1)(-1)^l) \\ &= n^l((p-1)^l + (p-1)(-1)^l) \\ &= (np-n)^l + (p-1)(-n)^l. \end{aligned}$$

(b) 由推论 1.3：$f_{K_{n,p}}(l) = \lambda_1^l + \lambda_2^l + ... + \lambda_{np}^l$ 故 $K(n,p)$ 的特征值为：$np-n$(1 重)，$-n$($p-1$ 重)，0($np-p$ 重)。

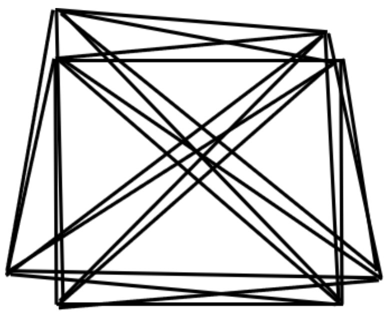


图 1:

注：完全二部图 K_{nn} 的邻接矩阵是

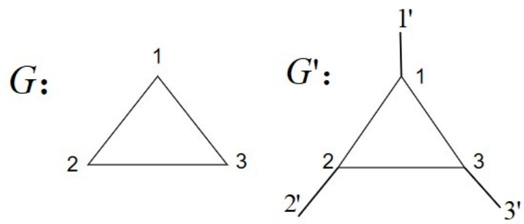
$$(J-I) \otimes I = \begin{pmatrix} 0 & J & ... & J & J \\ J & 0 & ... & J & J \\ . & . & ... & . & . \\ . & . & ... & . & . \\ . & . & ... & . & . \\ J & J & ... & 0 & J \\ J & J & ... & J & 0 \end{pmatrix}.$$

7、由于在简单图 G 中长为 l 的闭游动的条数为：$f_G(l) = \lambda_1^l + \lambda_2^l + ... + \lambda_p^l$，则在 $G(n)$ 中，取上式中的任意一条游动以 v 为起点，长为 l 的闭游动的个数会增加 n^{l-1} 倍，故在 $G(n)$ 中有：

$$\begin{aligned} f_{G(n)}(l) &= n \cdot n^{l-1} \cdot f_G(l) \\ &= n^l(\lambda_1^l + \lambda_2^l + ... + \lambda_p^l) \qquad . \\ &= (n\lambda_1)^l + (n\lambda_2)^l + ... + (n\lambda_p)^l \end{aligned}$$

因此 $G(n)$ 的特征值分别为：$n\lambda_1, n\lambda_2, ..., n\lambda_p$ 和 $np-p$ 个 0。

8、例如：令 G 与 G' 如图：



则：此图中，$A(G)$ 与 $A(G')$ 的关系为：

$$A(G) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$A(G') = \begin{pmatrix} A(G) & I \\ I & 0 \end{pmatrix}_{6\times 6}.$$

故由题意可知图 G 与图 G' 的邻接矩阵 $A(G), A(G')$ 的关系为:

$$A(G') = \begin{pmatrix} A(G)_{p\times p} & I \\ I & 0 \end{pmatrix}_{2p\times 2p}.$$

其中 I 是 $p \times p$ 的单位矩阵，$A(G')$ 是 $2p \times 2p$ 的矩阵。求 $A(G')$ 的特征值有：

$$\begin{aligned} |xI - A(G')| &= \begin{bmatrix} xI - A(G)_{p\times p} & -I \\ -I & xI \end{bmatrix}_{2p\times 2p} \\ &= \begin{bmatrix} (x-\frac{1}{x})I - A(G)_{p\times p} & 0 \\ -I & xI \end{bmatrix}_{2p\times 2p} \\ &= |xI| \cdot |(x-\frac{1}{x})I - A(G)| \\ &= 0. \end{aligned}$$

令 $t = x - \frac{1}{x}$，并设 $A(G)$ 的特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_p$，则 $|tI - A(G)| = c(t-\lambda_1)(t-\lambda_2)...(t-\lambda_p)$ 其中 c 为常数，因此由 $x - \frac{1}{x} = \lambda_i$，其中 $i = 1, 2, ..., p$，求解可得：$x = \frac{\lambda_i \pm \sqrt{\lambda_i^2+4}}{2}$。

9、(a) 证明：由于

$$(A(G)^l)_{ij} = \sum_{k=1}^{p} C_k(i,j)\lambda_k^l$$

图 2:

由推论 1.2 知 $C_k(i,i)=u_{ik}\cdot u_{ik}=u_{ik}^2\geqslant 0$，得证。

(b) 令图 G 如下：Fig.2, 则：$A(G)=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$. 由 $|\lambda E-A|=\lambda^2-1$，得 $\lambda=\pm1$, 此时可求出特征值对应的特征向量并单位化，得到：$v_1'=\left|\begin{matrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\end{matrix}\right|$, $v_2'=\left|\begin{matrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{-\sqrt{2}}\end{matrix}\right|$ 于是，令 $U=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{-2}}\end{pmatrix}$，$\lambda_1=1,\lambda_2=-1$ 于是可得

$$A(G)^l=U\begin{pmatrix}\lambda_1^l & 0\\ 0 & \lambda_2^l\end{pmatrix}U^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\lambda_1^l+\frac{1}{2}\lambda_2^l & \frac{1}{2}\lambda_1^l-\frac{1}{2}\lambda_2^l\\ \frac{1}{2}\lambda_1^l-\frac{1}{2}\lambda_2^l & \frac{1}{2}\lambda_1^l+\frac{1}{2}\lambda_2^l\end{pmatrix}.$$

于是 $(A(G)^l)_{12}=\frac{1}{2}\lambda_1^l-\frac{1}{2}\lambda_2^l$，于是当 $i\neq j$ 时，可以有 $C_k(i,j)<0$。

10、由题意，图 G^* 表示与 G 的顶点集相同的图，且由图 G^* 的边的定义，可知：图 G^* 的邻接矩阵 $A(G^*)$ 与图 G 的邻接矩阵 $A(G)$ 之间的关系。即：$A(G^*)=A(G)^2$，以题中的图 G 为例有：

$$A(G)=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 0\end{pmatrix}.\quad A(G^*)=A(G)^2=\begin{pmatrix}2 & 1 & 2 & 1\\ 1 & 3 & 1 & 2\\ 2 & 1 & 2 & 1\\ 1 & 2 & 1 & 3\end{pmatrix}.$$

因此由 $A(G)$ 的特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_p$, 得 $A(G^*)$ 的特征值为 $\lambda_1^2,\lambda_2^2,...,\lambda_p^2$。证毕。

11、我们沿用题中的符号，可知 $K_{21}^0=J_{21}$（全 1 矩阵），我们可以适当的排列点的顺序可得：$K_{21}^0-K_{18}^0$ 的矩阵如下:

$$A(\Gamma)=\begin{pmatrix}0 & 0 & ... & 0 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & ... & 0 & 1 & 1 & 1\\ . & . & ... & . & . & . & .\\ . & . & ... & . & . & . & .\\ . & . & ... & . & . & . & .\\ 0 & 0 & ... & 0 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & ... & 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & ... & 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & ... & 1 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix}.$$

因此 $rankA(\Gamma)=2$，故矩阵 $A(\Gamma)$ 至少有 $21-2=19$ 个特征值为 0。设其余两个特征值为 λ_1,λ_2，则 $\lambda_1+\lambda_2=tr(A(\Gamma))=3$。由：

$$A(\Gamma)^2=\begin{pmatrix}3&3&...&3&3&3&3\\3&3&...&3&3&3&3\\.&.&...&.&.&.&.\\.&.&...&.&.&.&.\\.&.&...&.&.&.&.\\3&3&...&3&3&3&3\\3&3&...&3&21&21&21\\3&3&...&3&21&21&21\\3&3&...&3&21&21&21\end{pmatrix}.$$

由矩阵可知，$rankA(\Gamma)^2=2$，故 $A(\Gamma)^2$ 的特征值为：λ_1^2,λ_2^2 与 19 个 0。因此得

$$\lambda_1^2+\lambda_2^2=tr(A(\Gamma)^2)=3\times 18+21\times 3=117.$$

故联立方程

$$\begin{cases}\lambda_1+\lambda_2=3\\ \lambda_1^2+\lambda_2^2=117.\end{cases}\tag{3}$$

解得：$\lambda_1=9\ or\ -6,\lambda_2=-6\ or\ 9$。故 $A(\Gamma)$ 的特征值为 $9,-6,0$（19 重）。Γ 中长为 $l\geqslant 1$ 的闭游动的条数为 $C(l)=9^l+(-6)^l$。

注：对于 $\lambda_1^2+\lambda_2^2$ 可以直接来考虑 $A(\Gamma)=A(K_{21}^0-K_{18}^0)$ 长为 2 的闭游动的个数，有 18 个顶点度是 3。有 3 个顶点度是 21。从而有：

$$\lambda_1^2+\lambda_2^2=3\times 18+21\times 3=117.$$

此时再联立解方程即可。

12、(a) 法一：由 G 是有限图，$\triangle$ 为 G 的最大度，$A(G)$ 的最大特征值为 λ_1，我们来估算闭游动的条数。由于自 v_i 出发长为 l 的闭游动的条数 $\leqslant\triangle^{l-1}$，由图 G 共有 p 个顶点，因此图 G 中闭游动的条数 $\leqslant p\cdot\triangle^{l-1}$，由书中定理可得 $\lambda_1^l+\lambda_2^l+...+\lambda_p^l\leqslant p\cdot\triangle^{l-1}$。注意：$p>\triangle$。此时，若 $\lambda_1>\triangle$，则当 $l\to\infty$ 时，会产生矛盾。因此:$\lambda_1\leqslant\triangle$。证毕。

法二：设 A 为图 G 的邻接矩阵，λ_1 为 A 的最大特征值，X_1 为 λ_1

对应的特征向量。因此可令：

$$AX_1=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n}\\ . & . & ... & .\\ . & . & ... & .\\ . & . & ... & .\\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ .\\ .\\ .\\ x_n\end{pmatrix}=\lambda_1X_1.$$

此时，我们可以形式上将 λ_1 写作 $\lambda_1=\frac{AX_1}{X_1}$，这个等式看起来是十分荒谬的，但我们可以将 $\frac{AX_1}{X_1}$ 看作是对应分量的比，这是因为分子分母均为一个列向量。现在取 x_1 为列向量 X_1 中最大的一个值，不妨记这个值为 $X_1(x_1)$，因此 $AX_1(x_1)=a_{11}x_1+a_{12}x_2+...+a_{1n}x_n$，故：

$$\lambda_1=\frac{AX_1(x_1)}{X_1(x_1)}=\frac{a_{11}x_1+a_{12}x_2+...+a_{1n}x_n}{x_1}\leqslant a_{11}+a_{12}+...+a_{1n}\leqslant\triangle.$$

上式最后一个 $\leqslant$ 是因为 $a_{11}+a_{12}+...+a_{1n}$ 是一个顶点的度。

（b）、分类讨论：由于 $\lambda_1\leqslant\triangle$，若有 $\triangle\leqslant\sqrt{2q}$，则显然有：$\lambda_1\leqslant\sqrt{2q}$。若有 $\triangle>\sqrt{2q}$，则：

我们现在考虑 A^2，设 λ^2 是 A^2 的最大特征值（注意是“设”）。令 $\triangle'$ 为 A^2 中每一行的和的最大值，由于 A^2 可以看做另一个图 G' 的邻接矩阵，此时 $\triangle'$ 为图 G' 的顶点的最大度。故由 (a) 中的讨论可得：$\lambda^2\leqslant\triangle'$。由：

$$A^2=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n}\\ . & . & ... & .\\ . & . & ... & .\\ . & . & ... & .\\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n}\\ . & . & ... & .\\ . & . & ... & .\\ . & . & ... & .\\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn}\end{pmatrix}.$$

由于 $\triangle$ 是矩阵 A 的行和中的最大值，不妨设为矩阵 A 的第一行。故矩阵的第一行有 $\triangle$ 个 1，矩阵的第一列有 $\triangle$ 个 1。因此当矩阵的第一行乘以矩阵的第一列时，最大值为 $\triangle$，由于图 G 有 q 条边，利用握手定理，可知图 G 的顶点度之和为 $2q$。于是矩阵 A 除了第一列后，还有 $2q-\triangle$ 个 1。于是：

$$\triangle'\leqslant\triangle+2q-\triangle=2q.$$

故有：$\lambda^2\leqslant 2q$，$\lambda_1\leqslant|\lambda|\leqslant\sqrt{2q}$。证毕。
(注：作者认为前两行的分类讨论没有起到作用，可以直接进行下面的证明)

（注：为了不失一般性，可以将上述证明中的 $\triangle$ 换成图 G 的顶点的度，不妨设为 $d_1, d_2, ..., d_p$）。这样就可以对每列（或者行）都可以得到

$$\triangle' \leqslant d_i + 2q - d_i = 2q.$$

上式可以以组合的方式得到，考虑 $A(G)$ 中长为 2 的游动。一种方式是闭游动得到 d_i。第二种方式是非闭游动至多 $2q - d_i$。因此得到上式。从而得证。

13、由题意，存在 $\ell \geq 1$, 使得对任意的顶点 u, v 之间长为 ℓ 的游动数都是奇数。因此有：

$$A(G)^\ell = J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & ... & 1 \\ 1 & 1 & ... & 1 \\ . & . & ... & . \\ . & . & ... & . \\ 1 & 1 & ... & 1 \end{pmatrix} \mod 2.$$

由于 $A(G)^\ell$ 不满秩，故 $A(G)$ 不满秩。故存在一个非零向量 α，使得 $A(G)\alpha = 0$。如果 $\alpha(\mod 2)$ 中有奇数个 1, 则 $A(G)^\ell\alpha(\mod 2) = J\alpha(\mod 2) \neq 0$. 矛盾. 因此 α 中有偶数个 1 $(\mod 2)$. 且 G 中的任意顶点与 $\alpha(\mod 2)$ 中 1 所对应的偶数个顶点相连.(若否，与 $A(G)\alpha = 0(\mod 2)$ 矛盾). 故 S 即为 $\alpha(\mod 2)$ 中 1 所对应的顶点。

2 第二章 立方体和 Radon 变化

0、本章主要是利用 Radon 变换得到 n 维立方体 C_n 的特征值与特征向量，进而考虑 C_n 上的游动。然而就对 C_n 的特征值与特征向量的求解，可以利用图的笛卡尔积（卡氏积，Cartesian products）的有关结果直接得到。定义：Given graph G_1 and G_2 with vertex set V and W, respectively. Their Cartesion product $G_1 \boxdot G_2$ is the graph with vertex set $V \times W$, where $(v, w) \sim (v', w')$ when either $v = v'$ and $w \sim w'$ or $w = w'$ and $v \sim v'$.

两个图 G_1 与 G_2 的笛卡尔积 $G_1 \boxdot G_2$ 的邻接矩阵是

$$A(G_1 \boxdot G_2) = A(G_1) \otimes I + I \otimes A(G_2),$$

其中 I 是单位矩阵，$\otimes$ 是张量的符号。

两个图 G_1 与 G_2 的特征值分别 $\lambda_1, ..., \lambda_p$ 和 $\mu_1, ..., \mu_q$。则笛卡尔积 $G_1 \boxdot G_2$ 的特征值为 $\lambda_i + \mu_j$，$1 \leqslant i \leqslant p, 1 \leqslant j \leqslant q$。

因而，对于 C_2，我们很显然 $C_2 := C_1 \boxdot C_1$。同样对 C_n，我们有

$$C_n = C_1 \boxdot C_1 \boxdot C_1 \boxdot \cdots \boxdot C_1,$$

这里有 n 个 C_1。而 C_1 的特征值是 $-1, 1$。从而 C_n 的特征值是 $n - 2i$，重数为 $\binom{n}{i}$，$i = 0, 1, ..., n$。

以上结果，亦可参考书：A.E.Brouwer and W.H.Haemers, 《Spectra of Graphs》, Springer. 这本书也可以作为对前三章内容的深入了解。

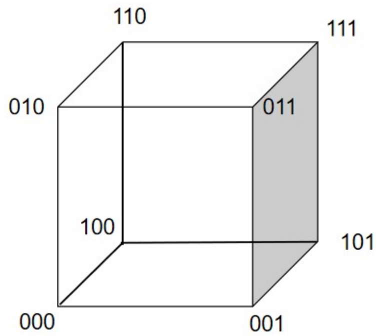
Stanley 在书中是利用 Radon 变换来求解的，主要是想说明 Radon 变换这一代数方法的强大之处，亦见书中的注记。

1、(a) 考虑将 n 个硬币中，正面朝上记为 0，反面朝上记为 1。则 n 个硬币都正面朝上为 $(0, 0, ..., 0)$，都反面朝上为 $(1, 1, ..., 1)$。因此可将 n 个硬币的正反面看做图 C_n，硬币的翻转看做图 C_n 的游动，随机的选取一枚并将它翻转，表示将 $(0, 0, ..., 0)$ 中的一个坐标变为 1。例如：C_3 中 $(0, 0, 0)$ 变为 $(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)$ 中的一个。因此由推论 2.5，可知 $u = (0, 0, ..., 0)$ 出发长为 l 的闭游动的个数为：

$$(A^l)_{uu} = \frac{1}{2^n} \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (n - 2i)^l.$$

闭游动表示：经过 l 次翻转，硬币仍全部正面朝上。故所求概率为：

$$P = \frac{(A^l)_{uu}}{n^l} = \frac{\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (n - 2i)^l}{2^n n^l}.$$



C_3

（b）由题意，现在要求经过 l 次后，所有硬币反面朝上，也就是求 $(0,0,...,0)$ 到 $(1,1,...,1)$ 之间长为 l 的游动数。由推论 2.5，有 $u=(0,0,...,0), v=(1,1,...,1), \omega(u+v)=n$。因此：

$$(A^l)_{uv}=\frac{1}{2^n}\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}(-1)^j\binom{n}{j}\binom{n-n}{i-j}(n-2i)^l=\frac{1}{2^n}\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}(-1)^j\binom{n}{j}(n-2i)^l.$$

故所求概率为：

$$P=\frac{(A^l)_{uv}}{n^l}=\frac{\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}(-1)^j\binom{n}{j}(n-2i)^l}{2^n n^l}.$$

（c）由于现在一次翻转两枚硬币，将其看做一枚一枚的翻转，翻转的第二枚硬币不可以是之前的第一枚硬币。因此在条件 (c) 下，邻接矩阵的对角线元素均为 0。例如当 $n=3$ 时，从 $(0,0,0)$ 出发经过两步后得到 $(1,1,0),(0,1,1),(1,0,1)$，且到达这三个地方的方案都是两种。故在条件 (c) 下邻接矩阵为：$\frac{1}{2}(A(C_n)^2-nI)$，其中 I 为单位矩阵。由于 $A(C_n)$ 的特征值为 $\lambda_u=n-2\omega(u), u\in Z_2^n$，故此邻接矩阵的特征值为：$\frac{\lambda_u^2-n}{2}, u\in Z_2^n$。因此在条件 (c) 下，从 $(0,0,...,0)$ 出发长为 l 的闭游动数为：

$$\begin{aligned}(A^l)_{uu}&=\frac{1}{2^n}\sum_{u\in Z_2^n}(\frac{\lambda_u^2-nI}{2})^l\\&=\frac{1}{2^{n+l}}\sum_{u\in Z_2^n}(\lambda_u^2-n)^l\\&=\frac{1}{2^{n+l}}\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}[(n-2i)^2-n]^l.\end{aligned}$$

故此概率为：$P=\frac{(A^l)_{uu}}{\binom{n}{2}^l}=\frac{\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}[(n-2i)^2-n]^l}{2^{n+l}\binom{n}{2}^l}$.

2、略

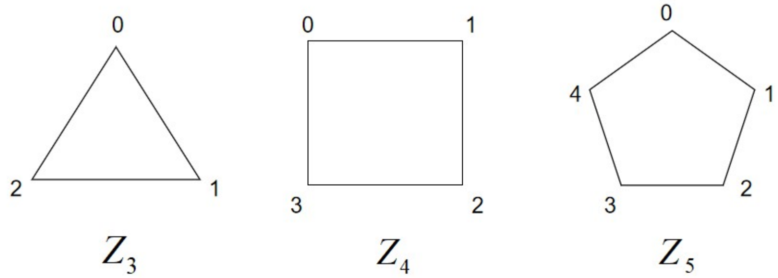
3、Very difficult.

4、由题意 $\omega(u+v)=2$，因此情况同 1 题 (c)，此时图 G 的邻接矩阵为:$\frac{A(C_n)^2-nI}{2}$，又因为 $A(C_n)$ 的特征值为：$\lambda_u=n-2\omega(u), u\in Z_2^n$，故 G 的特征值为：

$$\frac{\lambda_u^2-n}{2}=\frac{(n-2\omega(u))^2-n}{2}, u\in Z_2^n.$$

针对上式等号右端，有 $\binom{n}{i}$ 个 $\frac{(n-2i)^2-n}{2}$。因此，对 $i=0,1,2,...,\lfloor\frac{n}{2}\rfloor$，有 $\binom{n}{i}+\binom{n}{n-i}$ 个特征值为 $\frac{(n-2i)^2-n}{2}$.

5、（a）



（b）$\mathcal{V}$ 的维数为 n.

证明：对任意的 $u\in Z_n$ 令 $f_u(v)=\delta_{uv}$，下证 f_u 为 $\mathcal{V}$ 的一组基。对任意 $g\in\mathcal{V}$ 由 $g=\sum_{u\in Z_n}g(u)f_u$，因此 $\mathcal{V}$ 中的任一元均可由 f_u 表出。又因为 $k_1f_{u_1}+k_2f_{u_2}+...+k_nf_{u_n}=0$，两边同时作用在 $(u_1,u_2,...,u_n)$ 上得：$k_1=k_2=...=k_n=0$，因此：$f_{u_1},f_{u_2},...,f_{u_n}$ 线性无关，故 $dim\mathcal{V}=n$。

（c）由在复数空间上,在 $\mathcal{V}$ 上定义的内积为:$<f,g>=\sum_{u\in Z_n}f(u)\overline{g(u)}$，要证 B 是 $\mathcal{V}$ 的一组基，只需证明 B 是线性无关的即可（因为 $\#B=dim\mathcal{V}=n$）。下证 B 中的元是正交的。由：

$$\begin{aligned}<\chi_u,\chi_v> &= \sum_{w\in Z_n}\chi_u(w)\overline{\chi_v(w)}=\sum_{w\in Z_n}\zeta^{u\cdot w}\cdot\overline{\zeta^{v\cdot w}}\\ &=\sum_{w\in Z_n}e^{\frac{2\pi i}{n}\cdot uw}\cdot\overline{e^{\frac{2\pi i}{n}\cdot vw}}=\sum_{w\in Z_n}e^{\frac{2\pi i}{n}\cdot uw}e^{-\frac{2\pi i}{n}\cdot vw}\\ &=\sum_{w\in Z_n}e^{\frac{2\pi i}{n}(u-v)w}=\sum_{w\in Z_n}\zeta^{(u-v)w}.\end{aligned}$$

当 $u-v=0$ 即：$u=v$ 时，$<\chi_u,\chi_v>=n$。当 $u-v\neq 0$ 即：$u\neq v$ 时，对任意 $y\in Z_n,(y\neq 0)$ 有：

$$\begin{aligned}\sum_{w\in Z_n}\zeta^{y\cdot w} &= 1+\zeta^{y\cdot 1}+\zeta^{y\cdot 2}+...+\zeta^{y\cdot(n-1)}\\ &=0.\end{aligned}$$

上式第二个等号是因为：(令 $x=\zeta^y$)
$x^n-1=(x-1)(1+x+x^2+...+x^{n-1})$，令 $x=\zeta$ 即得。因此，B 中的元素是正交的，从而是线性无关的。
(注：正交 $\Rightarrow$ 线性无关，简证之，由 $k_1e_1+k_2e_2+...+k_ne_n=0$，则：$e_1(k_1e_1+k_2e_2+...+k_ne_n)=0$，得：$k_1\cdot e_1^2=0$, 故：$k_1=0$，同理得：$k_1=k_2=...=k_n=0$)

（d）由

$$\begin{aligned}\Phi_\Gamma\chi_u(v)&=\sum_{w\in\Gamma}\chi_u(v+w)\\&=\sum_{w\in\Gamma}\zeta^{u\cdot(v+w)}\\&=\sum_{w\in\Gamma}\zeta^{u\cdot w}\cdot\zeta^{u\cdot v}\\&=\sum_{w\in\Gamma}\zeta^{u\cdot w}\cdot\chi_u(v).\end{aligned}$$

因此：$\Phi_\Gamma\chi_u=\sum_{w\in\Gamma}\zeta^{u\cdot w}\cdot\chi_u$，故 Φ_Γ 的特征向量为函数：χ_u，对应的特征值为：$\lambda_u=\sum_{w\in\Gamma}\zeta^{u\cdot w}$。

（e）证明同引理 2.3。由

$$\begin{aligned}\Phi_\Delta f_u(v)&=\sum_{w\in\Delta}f_u(v+w)\\&=f_u(v+1)+f_u(v+n-1)=\delta_{u(v+1)}+\delta_{u(v+n-1)}\\&=\delta_{(u+n-1)v}+\delta_{(u+1)v}\\&=f_{u+1}(v)+f_{u+n-1}(v).\end{aligned}$$

因此：$\Phi_\Delta f_u=f_{u+1}+f_{u+n-1}$，对 $f_0,f_1,...,f_{n-1}$ 得：

$$\Phi_\Delta(f_0,f_1,...,f_{n-1})=(f_0,f_1,...,f_{n-1})\begin{pmatrix}0&1&0&...&0&0&1\\1&0&1&...&0&0&0\\0&1&0&...&0&0&0\\.&.&.&...&.&.&.\\.&.&.&...&.&.&.\\.&.&.&...&.&.&.\\0&0&.&...&1&0&1\\1&0&.&...&0&1&0\end{pmatrix}.$$

此矩阵恰好为：$A(Z_n)$。

（f）由于 Φ_Δ 关于基 F 的矩阵 $[\Phi_\Delta]$ 就是 Z_n 的邻接矩阵 $A(Z_n)$。因此 $A(Z_n)$ 的特征值为 $\lambda_u=\sum_{w\in\Delta}\zeta^{uw}$（这个由（d）得）,此时由 $\Delta=\{1,n-1\}$.

故

$$\begin{aligned}
\lambda_u &= \zeta^u + \zeta^{u(n-1)} \\
&= e^{\frac{2\pi i}{n}u} + e^{\frac{2\pi i}{n}(un-u)} \\
&= e^{\frac{2\pi i}{n}u} + e^{-\frac{2\pi i}{n}u} \\
&= cos\frac{2\pi u}{n} + i\cdot sin\frac{2\pi u}{n} + cos\frac{2\pi u}{n} - i\cdot sin\frac{2\pi u}{n} \\
&= 2cos\frac{2\pi u}{n}.
\end{aligned}$$

其中 $u=0,1,2,...,n-1$，因此 $A(Z_n)$ 的特征值为 $2cos\frac{2\pi j}{n}, 0\leqslant j\leqslant n-1$，下证与 $\lambda_u = 2cos\frac{2\pi u}{n}$ 对应的特征向量 E_u. 同理由推论 2.4 的证明：对任意 $g\in V$ 有 $g=\sum_v g(v)f_v$，当 $g=\chi_u$ 时，$\chi_u = \sum_{v\in Z_n}\chi_u(v)f_v = \sum_{v\in Z_n}\zeta^{uv}f_v$，因此：$E_u = \sum_{v\in Z_n}\zeta^{uv}\cdot v$.
(Φ_Δ 的特征向量关于 f_v 的展开系数，与 $A(Z_n)$ 的特征向量关于 v 的展开系数相同)

（g）已知特征值，下求长为 l 起始于 0 的闭游动：

$$A(Z_n)_{00} = \frac{1}{n}f_G(l) = \frac{1}{n}\sum_{u=0}^{n-1}(2cos\frac{2\pi u}{n})^l.$$

当 $n=4,6$ 时，不使用三角函数、复指数等。
当 $n=4$ 时，(法一)
令 $B=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$, 则：$B^2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=E$，$B^3=B, B^4=E, B^5=B, ...$
于是：

$$A(Z_n)=\begin{pmatrix}0&1&0&1\\1&0&1&0\\0&1&0&1\\1&0&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}B&B\\B&B\end{pmatrix}.$$

故:

$$
\begin{aligned}
A(Z_n)^l &= \begin{pmatrix} B & B \\ B & B \end{pmatrix}^l \\
&= \begin{pmatrix} 2^{l-1}B^l & 2^{l-1}B^l \\ 2^{l-1}B^l & 2^{l-1}B^l \end{pmatrix} \\
&= \begin{cases} \begin{pmatrix} 2^{l-1}E & 2^{l-1}E \\ 2^{l-1}E & 2^{l-1}E \end{pmatrix} & l\ is\ even \\ \begin{pmatrix} 2^{l-1}B & 2^{l-1}B \\ 2^{l-1}B & 2^{l-1}B \end{pmatrix} & l\ is\ odd \end{cases} \\
&= \begin{cases} \begin{pmatrix} 2^{l-1} & 0 & 2^{l-1} & 0 \\ 0 & 2^{l-1} & 0 & 2^{l-1} \\ 2^{l-1} & 0 & 2^{l-1} & 0 \\ 0 & 2^{l-1} & 0 & 2^{l-1} \end{pmatrix} & l\ is\ even; \\ \begin{pmatrix} 0 & 2^{l-1} & 0 & 2^{l-1} \\ 2^{l-1} & 0 & 2^{l-1} & 0 \\ 0 & 2^{l-1} & 0 & 2^{l-1} \\ 2^{l-1} & 0 & 2^{l-1} & 0 \end{pmatrix} & l\ is\ odd. \end{cases}
\end{aligned}
$$

此时，始于 0，长为 l 的闭游动数 $=\begin{cases} 2^{l-1} & l\ is\ even; \\ 0 & l\ is\ odd. \end{cases}$

(法二)：由于 Z_4 的图与 Z_2^2 的图一样（即立方体 Z_2^2），故

$$(A^l)uu = \frac{1}{4}\sum_{i=0}^{2}\binom{2}{i}(2-2i)^l = \frac{1}{4}(2^l-(-2)^l) = \begin{cases} 2^{l-1} & l\ is\ even; \\ 0 & l\ is\ odd. \end{cases}$$

当 $n=6$ 时：

（法一）：直接利用特征值，

$$
\begin{aligned}
f &= \frac{1}{6}\left[\left(2cos\frac{\pi}{3}\right)^l + \left(2cos\frac{2\pi}{3}\right)^l + \left(2cos\frac{3\pi}{3}\right)^l + \left(2cos\frac{4\pi}{3}\right)^l + \left(2cos\frac{5\pi}{3}\right)^l + (2cos2\pi)^l\right] \\
&= \frac{1}{6}\cdot 2^l \cdot \left[\left(\frac{1}{2}\right)^l + \left(-\frac{1}{2}\right)^l + (-1)^l + \left(-\frac{1}{2}\right)^l + \left(\frac{1}{2}\right)^l + 1^l\right] \\
&= \begin{cases} \frac{1}{3}\cdot 2^l + \frac{2}{3} & l\ is\ even; \\ 0 & l\ is\ odd. \end{cases}
\end{aligned}
$$

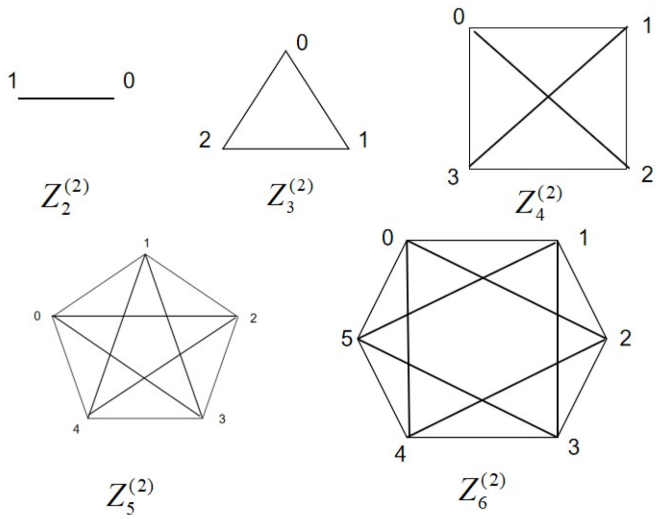
（法二）：当 l 是奇数时，显然为 0；当 l 为偶数时，令 F_l 为 $i \to i$ 长为 l 的闭游动数，G_l^{i+2} 为 $i \to i+2$ 长为 l 的游动数，（限制在此题中，可令 $i=0$），由于每个点的度均为 2，故：$2^l = F_l + 2G_l^{i+2}$（公式右端，由于 l 是偶数，从 0 出发，只能到达 $0,2,4$ 处），且有 $F_l = 2G_{l-1}^{i+1}$ (1)（F_l 为 0 到 1 长为 $l-1$ 的游动数 +0 到 5 长为 $l-1$ 的游动数）；$G_{l-1}^{i+1} = F_{l-2} + G_{l-2}^{i+2}$ (2)(0 到 1 长为 $l-1$ 的游动数 =0 到 0 长为 $l-2$ 的游动数 +0 到 2 长为 $l-2$ 的游动数)。将（2）式带入（1）式得：

$$F_l = 2F_{l-2} + 2G_{l-2}^{i+2},$$

$$F_l - F_{l-2} = F_{l-2} + 2G_{l-2}^{i+2} = 2^{l-2}.$$

由 $F_0 = 1, F_2 = 2$ 及等比数列求和得：$F_l = \frac{1}{3} \cdot 2^l + \frac{2}{3}$. ($F_2 - F_0 = 2^0, F_4 - F_2 = 2^2, F_6 - F_4 = 2^4, ..., F_l - F_{l-2} = 2^{l-2}$ 得：$F_l = 2 + 2^2 + 2^4 + ... + 2^{l-2} = \frac{1}{3} \cdot 2^l + \frac{2}{3}$)

（h）



由题意 n 一定大于等于 2，可以画出 $n = 2,3,4,5,6$ 的图，更加直观；

当 $n \geqslant 5$ 时，$Z_n^{(2)}$ 的邻接矩阵为 $[A(Z_n)^2 + A(Z_n) - 2I]$（因为在图中游动两次，会有闭游动），其中 I 为单位矩阵。故此时特征值为：

$$4cos^2\frac{2\pi j}{n} + 2cos\frac{2\pi j}{n} - 2,\ 0 \leqslant j \leqslant n-1.$$

因而：

$$F_l = \frac{1}{n}\left[\sum_{j=0}^{n-1}\left(4cos^2\frac{2\pi j}{n} + 2cos\frac{2\pi j}{n} - 2\right)^l\right].$$

（法二：）可以考虑令 $\triangle=\{1,2,n-1,n-2\}$。然后利用第 (d) 和 (e) 的方法来求解。

当 $n=2$ 时，显然有 $F_l=\begin{cases}0 & l\ is\ even;\\ 1 & l\ is\ odd.\end{cases}$

当 $n=3$ 时，有：

$$A=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix},|\lambda E-A|=(\lambda+1)(\lambda^2-\lambda-2)=(\lambda+1)^2(\lambda-2),$$

$$F_l=\frac{1}{3}((-1)^l)+(-1)^l+2^l)=\frac{1}{3}(2(-1)^l+2^l).$$

当 $n=4$ 时，

$$A=\begin{pmatrix}0&1&1&1\\1&0&1&1\\1&1&0&1\\1&1&1&0\end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned}|\lambda E-A|&=\begin{bmatrix}\lambda&-1&-1&-1\\-1&\lambda&-1&-1\\-1&-1&\lambda&-1\\-1&-1&-1&\lambda\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda&-1&-1&-1\\-1&\lambda&-1&-1\\0&-\lambda-1&\lambda+1&0\\0&-\lambda-1&0&\lambda+1\end{bmatrix}\\&=\begin{bmatrix}\lambda&-3&-1&-1\\-1&\lambda-2&-1&-1\\0&0&\lambda+1&0\\0&0&0&\lambda+1\end{bmatrix}\\&=\lambda(\lambda-2)(\lambda+1)^2+(-3)(\lambda+1)^2\\&=(\lambda+1)^3(\lambda-3).\end{aligned}$$

故有 $F_4=\frac{1}{4}(3\cdot(-1)^l+3^l)$.

6、由题意有：

$$A(\widetilde{C}_n) = A(C_n) + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & ... & 1 & 0 & 0 \\ . & . & . & ... & . & . & . \\ . & . & . & ... & . & . & . \\ . & . & . & ... & . & . & . \\ 0 & 1 & . & ... & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & . & ... & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(注：此式可能与下面的证明无关，只是由题意可以得到)
现：参照书中 C_n 的计算，定义 $\widetilde{\Delta} = \Delta \cup (1,1,1,...,1)$，同样有 $[\Phi_{\widetilde{\triangle}}]$ 表示线性变换 $\Phi_{\widetilde{\triangle}} : V \to V$ 的矩阵。设 $v \in Z_2^n$，有:

$$\Phi_{\widetilde{\triangle}} f_u(v) = \sum_{w \in \widetilde{\triangle}} f_u(v+w) = \sum_{w \in \widetilde{\triangle}} f_{u+w}(v).$$

因此：$\Phi_{\widetilde{\triangle}} f_u = \sum_{w \in \widetilde{\triangle}} f_{u+w}$ 上式说明矩阵 $[\Phi_{\widetilde{\triangle}}]$ 的 (f_u, f_v) 元（简记为 (u,v) 元）为：

$$(\Phi_{\widetilde{\triangle}})_{uv} = \begin{cases} 1 & if\ u+v \in \widetilde{\triangle} \\ 0 & otherwise. \end{cases}$$

$u+v \in \widetilde{\triangle}$ 说明：u 和 v 仅有一个坐标不同或 $u+v = (1,1,1,...,1)$ 这正好是 uv 作为 $\widetilde{C}_n$ 的边的条件。因此有：$[\Phi_{\widetilde{\triangle}}] = A(\widetilde{C}_n)$
由：

$$\lambda_u = \sum_{v \in \widetilde{\triangle}} (-1)^{uv} = n - 2\omega(u) + (-1)^{\omega(u)}.$$

（其中 ω 表示 $Hamming$ 权）
因此有：

$$(\widetilde{A}^l)_{uu} = \frac{1}{2^n} \sum_{i=0}^{n} \left[\binom{n}{i} ((n-2i) + (-1)^i)^l \right].$$

证毕。

3 第三章 随机游动

1、注：随机游动是有限状态的马尔科夫链。

定理：不可约且非周期的有限马尔科夫链有唯一的平稳分布存在。

定理：如果一个非周期的马尔科夫链具有转移矩阵 P，且它的任何两个状态是连通的，则 $\lim\limits_{n\to\infty} p_{ij}^n = \pi(j)$.

习题 1 的题中条件满足这两个定理的条件，因此习题 1 得证。

注：简要介绍马尔科夫链。

马尔科夫链：一组具有马尔科夫性质的离散随机变量的集合。具体的，对概率空间 (Ω, F, P) 内以一维可数集为指数集的随机变量的集合：$X = X_n, n > 0,$，若随机变量的取值都在可数集内：$X = s_i, s_i \in S$，且随机变量的条件概率满足如下关系：$P(X_{t+1}|X_t, ..., X_1) = P(X_{t+1}|X_t)$，则 X 被称为马尔科夫链，可数集 $S \in Z$ 被称为状态空间，马尔科夫链在转态空间的取值为状态。（以上为 Discrete-Time MC）即：DTMC。具有连续指数集的情形，虽然被称为连续时间马尔科夫链（Continuous-Time MC）即：CTMC。但本质是马尔科夫过程。常见的马尔科夫链的指数集被称为“步”或“时间步”。

性质：无记忆性：即 $t+1$ 步的随机变量在给定第 t 步随机变量后与其余的随机变量条件独立。

转移矩阵：

$$P_{n,n+1} = \begin{pmatrix} P_{00} & P_{01} & P_{02} & ... \\ P_{10} & P_{11} & P_{12} & ... \\ P_{20} & P_{21} & P_{22} & ... \\ . & . & . & ... \\ . & . & . & ... \\ . & . & . & ... \end{pmatrix}.$$

(1) 马尔科夫链决定转移矩阵，转移矩阵决定马尔科夫链。

(2) 此矩阵为正定矩阵，且对任意 $i, j, P_{ij} > 0$，任意 $i, \sum_j P_{i,j} = 1$。

(3) 第 i_n 行表示 $X_n = S_{i_n}$ 时，X_{n+1} 取所有可能转态的概率（离散状态）。

2、略

3、（a）$(\Rightarrow)$，若 $f(x) = P(x)Q(x)$ 的所有系数非负，则 $f(a) = \sum a_n a^n, \forall a > 0, a_n \geqslant 0$，因为 $f(a)$ 为非零多项式，所以 $f(a) > 0$，故 $P(a)Q(a) > 0$，因此不存在实数 $a > 0$，使得 $P(a) = 0$ 成立。

$(\Leftarrow)$，略

（b）略

4、参照例 3.1，做概率矩阵。由于 C_n 是 n 度正则图，先只考虑 $(0,0,0,...,0)$ 到其他点的概率为 $\frac{1-p}{n}$，故有 $\frac{1-p}{n}A(C_n)$，再由自己到自己的概率为 p. 故 $M'(C_n)=\frac{1-p}{n}A(C_n)+pI$。其中 I 为单位矩阵。所以：

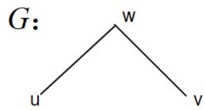
$$\lambda(M'(C_n))=\frac{1-p}{n}(n-2\omega(u))+p.$$

则:

$$\begin{aligned}P(l)&=\frac{1}{2^n}\sum_{u\in Z_2^n}\left(\frac{1-p}{n}(n-2\omega(u))+p\right)^l\\&=\frac{1}{2^n}\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\left(\frac{1-p}{n}(n-2i)+p\right)^l.\end{aligned}$$

5、略

6、（a）举反例即可验证，例如考虑图 G 有三个顶点 u,v,w，在 u 和 w 之间有一条边，在 w 和 v 之间有另一条边，此时有;$H(u,w)=1$，$H(w,u)=\frac{1}{2}\times 1+\frac{1}{2}(2+H(w,u))$，由此可知:$H(w,u)=3$. 因此不一定相等。若图 G 是正则图，由对称性有 $H(u,v)=H(v,u)$.



（b）略

7、显然，在完全图中：对 $\forall,i=1,2,3,...,n-1.$，$H(u_i,u_n)$ 均相等。故：

$$\begin{aligned}H(u_1,u_n)=&\frac{1}{n-1}\times 1+\frac{1}{n-1}(1+H(u_2,u_n))+\frac{1}{n-1}(1+H(u_3,u_n))+...\\&...+\frac{1}{n-1}(1+H(u_{n-1},u_n))\\=&\frac{1}{n-1}\times 1+\frac{n-2}{n-1}(1+H(u_1,u_n)).\end{aligned}$$

有上式可得：$H(u_1,u_n)=n-1$.

8、（1）利用数学归纳法：当 $n=1$ 时，$H(v_1,v_1)=(1-1)^2=0$，显然成立。当 $n=2$ 时，$H(v_1,v_2)=(2-1)^2=1$，等式依然成立。现假设 $n-1$ 时，有 $H(v_1,v_{n-1})=(n-2)^2$ 成立，则对 $H(v_1,v_n)$ 来说有：

$$H(v_1,v_n)=H(v_1,v_{n-1})+H(v_{n-1},v_n)=(n-2)^2+H(v_{n-1},v_n).$$

又由：

$$\begin{cases} H(v_{n-1},v_n)=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}(1+H(v_{n-2},v_n)) \\ H(v_{n-2},v_n)=\dfrac{1}{2}(1+H(v_{n-1},v_n))+\dfrac{1}{2}(1+H(v_{n-3},v_n)) \\ H(v_{n-3},v_n)=\dfrac{1}{2}(1+H(v_{n-2},v_n))+\dfrac{1}{2}(1+H(v_{n-4},v_n)) \\ . \\ . \\ . \\ H(v_2,v_n)=\dfrac{1}{2}(1+H(v_3,v_n))+\dfrac{1}{2}(1+H(v_1,v_n)) \\ H(v_1,v_n)=1+H(v_2,v_n). \end{cases}$$

化简可得：

$$\begin{cases} H(v_{n-1},v_n)=1+\dfrac{1}{2}H(v_{n-2},v_n) \\ H(v_{n-2},v_n)=1+\dfrac{1}{2}H(v_{n-1},v_n)+\dfrac{1}{2}H(v_{n-3},v_n) \\ H(v_{n-3},v_n)=1+\dfrac{1}{2}H(v_{n-2},v_n)+\dfrac{1}{2}H(v_{n-4},v_n) \\ . \\ . \\ . \\ H(v_2,v_n)=1+\dfrac{1}{2}H(v_3,v_n)+\dfrac{1}{2}H(v_1,v_n) \\ H(v_1,v_n)=1+H(v_2,v_n). \end{cases}$$

上式联立可得：$\frac{1}{2}H(v_{n-1},v_n)=(n-1)+\frac{1}{2}$，再化简可得：$H(v_{n-1},v_n)=2n-3$. 因此：

$$H(v_1,v_n)=(n-2)^2+2n-3=(n-1)^2.$$

得证。

（2）若 $i\neq j$.

当 $i<j$ 时，有 $H(v_1,v_j)=H(v_1,v_i)+H(v_i,v_j)$，得：$H(v_i,v_j)=(j-1)^2-(i-1)^2=j^2-2j-i^2+2i$。当 $i>j$ 时，由图的对称性及（1）的讨论有：$H(v_n,v_j)=H(v_n,v_i)+H(v_i,v_j)$ 得：$H(v_i,v_j)=(n-j)^2-(n-i)^2$

综上，可得当 $i \neq j$ 时，有：

$$\begin{cases} H(v_i, v_j) = (j-1)^2 - (i-1)^2 \quad if\ i < j; \\ H(v_i, v_j) = (n-j)^2 - (n-i)^2 \quad if\ i > j. \end{cases}$$

（3）如果在 v_1 与 v_n 之间也有一条边，现计算 $H(v_1, v_n)$:

$$\begin{cases} H(v_1, v_n) = \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2}(1 + H(v_2, v_n)) \\ H(v_2, v_n) = \frac{1}{2}(1 + H(v_1, v_n)) + \frac{1}{2}(1 + H(v_3, v_n)) \\ H(v_3, v_n) = 1 + \frac{1}{2}H(v_3, v_n) + \frac{1}{2}H(v_4, v_n) \\ . \\ . \\ . \\ H(v_{n-2}, v_n) = 1 + \frac{1}{2}H(v_{n-3}, v_n) + \frac{1}{2}H(v_{n-1}, v_n) \\ H(v_{n-1}, v_n) = \frac{1}{2} \times 1 + \frac{1}{2}(1 + H(v_{n-2}, v_n) = 1 + \frac{1}{2}H(v_{n-2}, v_n). \end{cases}$$

上式联立可得：

$$\begin{aligned} & H(v_2, v_n) + H(v_{n-2}, v_n) + H(v_{n-1}, v_n) \\ & = n - 2 + \frac{1}{2}H(v_1, v_n) + \frac{1}{2}H(v_2, v_n) \\ & + \frac{1}{2}H(v_{n-2}, v_n) + \frac{1}{2}H(v_{n-1}, v_n) + \frac{1}{2}H(v_{n-2}, v_n). \end{aligned}$$

又由图的对称性知：$H(v_1, v_n) = H(v_{n-1}, v_n)$. 得：$\frac{1}{2}H(v_2, v_n) = n - 2$. 故

$$H(v_1, v_n) = 1 + n - 2 = n - 1.$$

（4）由（3）中的联立式可得：

$$\begin{cases} H(v_1, v_n) = n - 1 \\ H(v_2, v_n) = 2n - 2^2 \\ H(v_3, v_n) = 3n - 3^2 \\ .... \end{cases}$$

在结合图的对称性，依次递推可得：

$$\begin{cases} H(v_i, v_n) = in - i^2 \quad if\ i \leqslant \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor; \\ H(v_i, v_n) = (n-i)n - (n-i)^2 \quad if\ i > \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor. \end{cases}$$

此时，令 m 为 i 与 j 之间（在圆弧上）的距离，即：m 为 i 到 j 或 j 到 i 的最短路径的长，则当 $i \neq j$ 时，由图的对称性可得：$m \leqslant \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$，故 $n-m \geqslant \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. 因此：

$$H(v_i, v_j) = H(v_{n-m}, v_n) = mn - m^2.$$

9、由题意 $K_{m,n}$ 为完全二部图，A_1 中共有 m 个顶点，每个顶点的度为 n；A_2 中共有 n 个顶点，每个顶点的度为 m；现设 u_1, u_2 为 A_1 中不同的两点，v_1, v_2 为 A_2 中不同的两点，则：

$$\begin{cases} H(u_1, v_1) = \dfrac{1}{n} \times 1 + \dfrac{n-1}{n}(1 + H(v_2, v_1)) = 1 + \dfrac{n-1}{n} H(v_2, v_1), \\ H(v_2, v_1) = \dfrac{1}{m}(1 + H(u_1, v_1)) \times m = 1 + H(u_1, v_1). \end{cases}$$

上式联立可得：

$$\begin{cases} H(u_1, v_1) = 2n - 1 \quad (*1) \\ H(v_2, v_1) = 2n \quad (*2) \end{cases}$$

而由：

$$\begin{cases} H(v_2, u_1) = \dfrac{1}{m} \times 1 + \dfrac{m-1}{m}(1 + H(u_2, u_1)) = 1 + \dfrac{m-1}{m} H(u_2, u_1) \\ H(u_2, u_1) = \dfrac{1}{n}(1 + H(v_2, u_1)) \times n = 1 + H(v_2, u_1). \end{cases}$$

上式联立可得：

$$\begin{cases} H(v_2, u_1) = 2m - 1 \quad (*3) \\ H(u_2, u_1) = 2m \quad (*4) \end{cases}$$

由式 $(*1)(*2)(*3)(*4)$ 可得所有的 $H(u, v)$ 的情况。即题中要求的两种不等价的情形。

10、略

11、证明：从点 u 出发，从未经过 v，n 步后到达某一顶点 w 的概率为：$(M[v]^n)_{uw}$ 则有：

$$p_n = \sum_{w \neq v} M[v]^{n-1}_{uw} \cdot \frac{\mu_{wv}}{d_w} = (M[v]^{n-1} T[v])_u.$$

（$T[v]$ 是 $p-1$ 维列向量，它的行按顶点 $w \neq v$ 标记，且 $T[v]_w = \frac{\mu_{wv}}{d_w}$）

$$H_k(u, v) = \sum_{n \geqslant 1} \binom{n}{k} (M[v]^{n-1} T[v])_u.$$

因此，其生成函数为：

$$\begin{aligned}\sum_{k\geqslant 0} H_k(u,v)x^k &= \left(\sum_{k\geqslant 0}\sum_{n\geqslant 1}\binom{n}{k}x^k M[v]^{n-1}T[v]\right)_u \\ &= \left(\sum_{n\geqslant 1}\sum_{k\geqslant 0}\binom{n}{k}x^k M[v]^{n-1}T[v]\right)_u.\end{aligned}$$

由于在固定的 n 下，有：

$$\sum_{k\geqslant 0}\binom{n}{k}x^k = \binom{n}{0}x^0 + \binom{n}{1}x^1 + ... + \binom{n}{n}x^n = (1+x)^n.$$

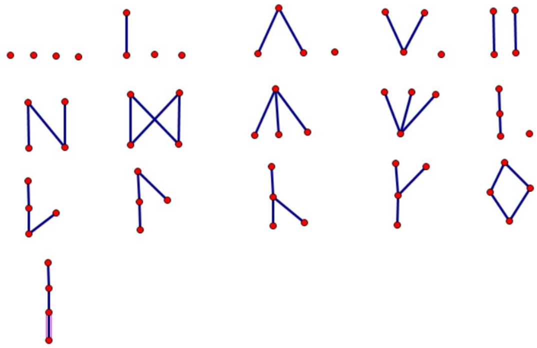
所以：

$$\begin{aligned}\sum_{k\geqslant 0} H_k(u,v)x^k &= \left(\sum_{n\geqslant 1}(1+x)^n M[v]^{n-1}T[v]\right)_u \\ &= \big(((1+x)M[v]^0 + (1+x)^2 M[v]^1 + ...)T[v]\big)_u \\ &= (1+x)((I_{p-1} - (x+1)M[v])^{-1}T[v])_u.\end{aligned}$$

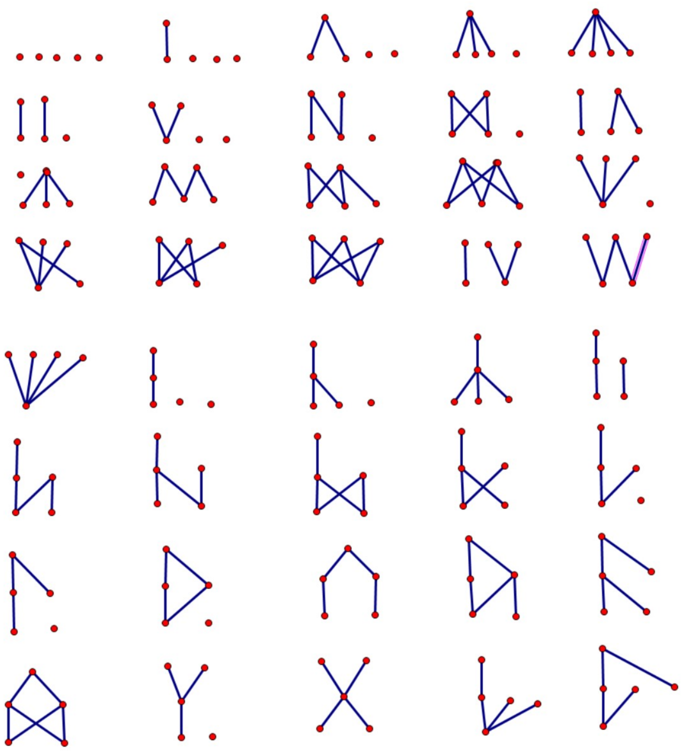
12、略

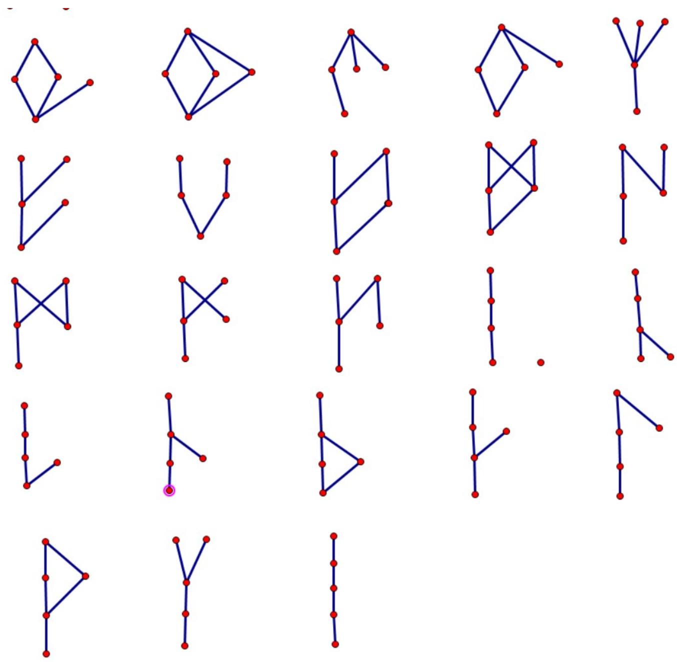
4 第四章 Sperner 性质

1、非同构四元偏序集的 Hasse 图：



非同构五元偏序集的 Hasse 图：





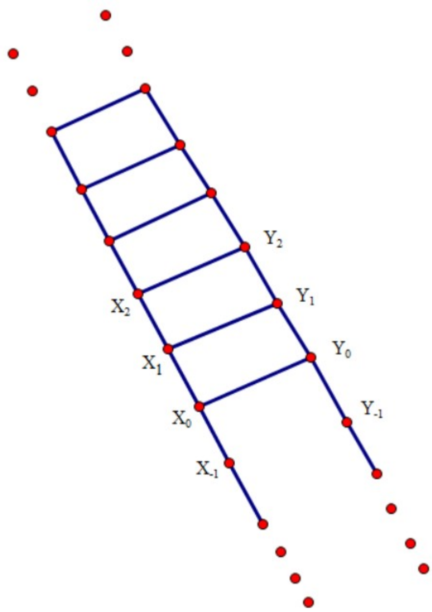
2、（a）法一：由于 $f: P \to P$ 是一个保序双射。因此 f^{-1} 存在，且 f^{-1} 也是双射，下证 f^{-1} 是保序的。由于在 P 中，若有 $x \leqslant y$ 则有：$f(x) \leqslant f(y)$，且 f 是双射，又 P 是有限集。故当 $x \leqslant y$ 取遍 P 中所有的偏序时，$f(x) \leqslant f(y)$ 也取遍 P 中的所有偏序关系。由 $x \leqslant y \Rightarrow f(x) \leqslant f(y)$，$x \leqslant y \Rightarrow f^{-1}f(x) \leqslant f^{-1}f(y)$，因此 f^{-1} 是保序的，故 f 是 P 上的一个自同构，即 f^{-1} 也是一个保序双射。

法二：由于 f 是有限集上的双射，故 f 是有限集的一个置换，故对某个 n，有 $f^n = id$（id 为恒等映射）。故有：$f^{-1} = f^{n-1}$，有 f 是保序的，故 f^{n-1} 是保序的，f^{-1} 是保序的。

（b）当 P 是无限时，不一定成立。反例：令 $P = Z \cup x$，其中 Z 是整数集，$x < 0$ 且 x 与所有的 $n < 0$ 不可比。令 $f(x) = x$，且若 $n \in Z$，则 $f(n) = n + 1$.（由于在 f 的映射下有 $x < 0$，但在 f^{-1} 下 $x, -1$ 是不可比的），故 f^{-1} 不是保序的。

再例如下图：

P:



令 $\varphi: P \to P$，其中：对任意 $i \in Z$，有 $x_i \to x_{i+1}$，$y_i \to y_{i+1}$。则：φ^{-1} 不是保序映射。例如：$y_0 \geqslant x_0$，但在 φ^{-1} 中，y_{-1} 与 x_{-1} 不可比。

3、Method I: 令 $F(q) = p_0 + p_1q + p_2q^2 + ... + p_nq^n$，$G(q) = r_0 + r_1q + r_2q^2 + ... + r_mq^m$。由于 $G(q), F(q)$ 为非负实系数的对称、单峰多项式。故有：

$$\begin{cases} p_i, r_i \geqslant 0 \quad p_i = p_{n-i} \quad r_i = r_{m-i} \quad i = 0, 1, 2, ..., n \setminus m, \\ p_0 \leqslant p_1 \leqslant ... \leqslant p_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \geqslant p_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1} \geqslant ... \geqslant p_n, \\ r_0 \leqslant r_1 \leqslant ... \leqslant r_{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} \geqslant r_{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 1} \geqslant ... \geqslant r_n. \end{cases}$$

因此：

$$\begin{aligned} F(q)G(q) =& p_0r_0 + (p_0r_1 + p_1r_0)q + (p_0r_2 + p_1r_1 + p_2r_0)q^2 + ... + \\ & \sum_{i+j} p_ir_jq^{i+j} + ... + (p_mr_{m-1} + p_{m-1}r_m)q^{m+n-1} + (p_nr_m)q^{m+n}. \end{aligned}$$

观察上式可得：

$$p_0r_0 = p_nr_m, \quad p_0r_1 + p_1r_0 = p_nr_{m-1} + p_{n-1}r_m, ...$$

由于 $p_i = p_{n-i}, r_i = r_{m-i}$，因此如 q^2 前的系数为：$p_0r_2 + p_1r_1 + p_2r_0 = p_{n-0}r_{m-2} + p_{n-1}r_{m-1} + p_{n-2}r_{m-0}$。等式右端刚好为 q^{m+n-2} 前的系数。因此同样的有：q^s 前的系数刚好等于 q^{m+n-s} 前的系数。故 $F(q)G(q)$ 是对称的。

现令：

$$F(q)G(q)=t_0+t_1q^1+t_2q^2+...+t_{m+n-1}q^{m+n-1}+t_{m+n}q^{m+n}.$$

由；

$$\begin{cases} p_0r_0\leqslant p_0r_1\leqslant p_0r_1+p_1r_0 \;\Rightarrow\; t_0\leqslant t_1 \\ p_1r_0+p_0r_1\leqslant p_0r_2+p_1r_1\leqslant p_0r_2+p_1r_1+p_2r_0 \;\Rightarrow\; t_1\leqslant t_2 \\ ... \\ ... \\ p_nr_m\leqslant p_nr_{m-1}\leqslant p_nr_{m-1}+p_{n-1}r_m \;\Rightarrow\; t_{m+n}\leqslant t_{m+n-1} \\ p_nr_{m-1}+p_{n-1}r_m\leqslant p_nr_{m-2}+p_{n-1}r_{m-1}\leqslant p_nr_{m-2}+p_{n-1}r_{m-1}+p_{n-2}r_m \\ \qquad\Rightarrow\; t_{m+n-1}\leqslant t_{m+n-2} \\ ... \\ ... \end{cases}$$

由于 $F(q)G(q)$ 是对称的，因此有上面的推导可知 $F(q)G(q)$ 是单峰的。
证毕。

Method II: Let $F(q)=p_0+p_1q+p_2q^2+...+p_nq^n$, $G(q)=r_0+r_1q+r_2q^2+...+r_mq^m$. By $G(q),F(q)$ is symmetric unimodal polynomials with nonnegative real coefficients. So we have

$$q^nF\left(\frac{1}{q}\right)=F(q),\qquad q^mG\left(\frac{1}{q}\right)=G(q).$$

Therefore, we have

$$q^{m+n}F\left(\frac{1}{q}\right)G\left(\frac{1}{q}\right)=F(q)G(q).$$

So $F(q)G(q)$ is also symmetric.

By $F(q)$ is symmetric and unimodal, $F(q)$ can be expressed as

$$F(q)=p_0(1+q+\cdots+q^n)+p_1'(q+q^2+\cdots+q^{n-1})+\cdots \\ +\begin{cases} 0 \quad \text{if } \; n \; \text{ is odd,} \\ p_{\frac{n}{2}}q^{\frac{n}{2}} \quad \text{if } \; n \; \text{ is even.} \end{cases}$$

Define $\frac{n-1}{2}$ (n: odd) or $\frac{n}{2}$ (n: even) as *the center* of $F(q)$.

For example,

$$\begin{aligned} &3+5q+5q^2+7q^3+7q^4+5q^5+5q^6+3q^7 \\ =&3(1+q+q^2+q^3+q^4+q^5+q^6+q^7)+2(q+q^2+q^3+q^4+q^5+q^6) \\ &+0(q^2+q^3+q^4+q^5)+2(q^3+q^4)+0. \end{aligned}$$

Similarly, $G(q)$ can be expressed as

$$
\begin{aligned}
G(q) = r_0(1+q+\cdots+q^m) + r_1'(q+q^2+\cdots+q^{m-1}) + \cdots \\
+ \begin{cases} 0 \quad \text{if } \ m \ \text{ is odd,} \\ r_{\frac{m}{2}} q^{\frac{m}{2}} \quad \text{if } \ m \ \text{ is even.} \end{cases}
\end{aligned}
$$

Define $\frac{m-1}{2}$ (m: odd) or $\frac{m}{2}$ (m: even) as *the center* of $G(q)$.

Now, we can check that

$$
(q^i + q^{i+1} + \cdots + q^{i+j})(q^k + q^{k+1} + \cdots + q^{k+l})
$$

is symmetric and unimodal. Furthermore, all products of this kind have the same center. Therefore, $F(q)G(q)$ is the sum of several products of the above type. So $F(q)G(q)$ is symmetric and unimodal.

4、（a）由 $q=2, n=3$，故令 $\alpha=(a_1,a_2,a_3)\in V=F_2^3$，则有：$a_1,a_2,a_3\in 0,1 \ \ (1+1=0)$ 现令：

$$
\begin{aligned}
&\alpha_1=(0,0,0),\ \alpha_2=(1,0,0),\ \alpha_3=(0,1,0),\ \alpha_4=(0,0,1),\\
&\alpha_5=(1,1,0),\ \alpha_6=(0,1,1),\ \alpha_7=(1,0,1),\ \alpha_8=(1,1,1).
\end{aligned}
$$

则：$\alpha_1\sim\alpha_8$ 为 V 中全部元。现考虑 V 中的子空间：

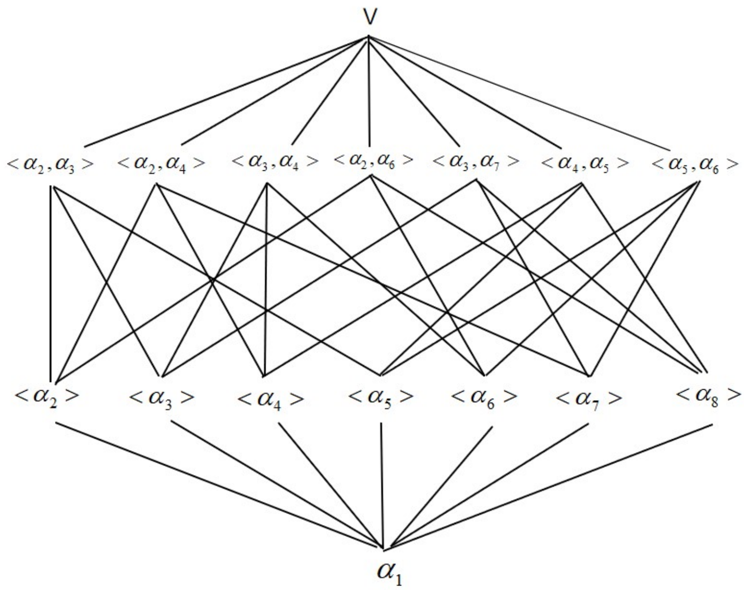
0 维：$\alpha_1=(0,0,0)$

1 维：$<\alpha_2>=\{\alpha_1,\alpha_2\}$，$<\alpha_3>=\{\alpha_1,\alpha_3\}$，...，$<\alpha_8>=\{\alpha_1,\alpha_8\}$.

2 维：

$$
\begin{aligned}
&<\alpha_2,\alpha_3>=\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_5\},\ <\alpha_2,\alpha_4>=\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4,\alpha_7\},\\
&<\alpha_3,\alpha_4>=\{\alpha_1,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_6\},\ <\alpha_2,\alpha_6>=\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_6,\alpha_8\},\\
&<\alpha_3,\alpha_7>=\{\alpha_1,\alpha_3,\alpha_7,\alpha_8\},\ <\alpha_4,\alpha_5>=\{\alpha_1,\alpha_4,\alpha_5,\alpha_8\},\\
&<\alpha_5,\alpha_6>=<\alpha_5,\alpha_7>=<\alpha_6,\alpha_7>=\{\alpha_1,\alpha_5,\alpha_6,\alpha_7\}.
\end{aligned}
$$

3 维：$V=<\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4>$ 因此 $B_3(2)$ 的 Hasse 图为：



（b）利用双计数技巧，计数 F_q^n 的线性无关 k 元组 $(v_1, v_2, ..., v_k)$ 的数目。即：F_q^n 的一个 k 维子空间 $L(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k)$，双计数 $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k$ 使得：$\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k$ 线性无关。一方面，选 α_1 时，有 $q^n - 1$ 种方案，选 α_2 时，有 $q^n - q$ 种方案，选 α_3 时，有 $q^n - q^2$ 种方案，....，选 α_k 时，有 $q^n - q^{k-1}$ 种方案，故共有 $(q^n-1)(q^n-q)...(q^n-q^{k-1})$ 种方案。另一方面，现选出 k 维子空间 W，有:$\binom{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{k}}$ 种选择方案，再选 $\alpha_1 \in W$ 有 $q^k - 1$ 种选择方案，再选 $\alpha_2 \in W$ 有 $q^k - q$ 种选择方案，...，选 $\alpha_k \in W$ 有 $q^k - q^{k-1}$ 种选择方案。因此有：

$$\binom{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{k}}(q^k-1)(q^k-q)...(q^k-q^{k-1}) = (q^n-1)(q^n-q)...(q^n-q^{k-1}).$$

而 $\binom{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{k}}$ 即为：$B_n(q)$ 中秩为 k 的元素个数。故：

$$\begin{aligned}\binom{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{k}} &= \frac{q^{k-1}\cdot q^{k-2}\cdot ...\cdot q(q^{n-k+1}-1)(q^{n-k+2}-1)...(q^n-1)}{q^{k-1}\cdot q^{k-2}\cdot ...\cdot q(q-1)(q^2-1)...(q^k-1)} \\ &= \frac{(q^{n-k+1}-1)(q^{n-k+2}-1)...(q^n-1)}{(q-1)(q^2-1)...(q^k-1)} \\ &= \frac{(1-q^n)...(1-q^{n-k+1})}{(1-q)(1-q^2)...(1-q^k)}.\end{aligned}$$

（c）在 n 次偏序集 $B_n(q)$ 中，秩为 0 的元素个数为 1，记为 $p_0 = 1$，由（b）可知当 $1 \leqslant k \leqslant n$ 时，秩为 k 的元素个数为：

$$p_k = \frac{(q^n-1)(q^{n-1}-1)...(q^{n-k+1}-1)}{(q^k-1)(q^{k-1}-1)...(q-1)}.$$

故当 $k=n$ 时，$p_n=1=p_0$
当 $1\leqslant k\leqslant n$ 时，需证：$p_k=p_{n-k}$，由：

$$p_k=\frac{(q^n-1)(q^{n-1}-1)...(q^{n-k+1}-1)}{(q^k-1)(q^{k-1}-1)...(q-1)},$$

$$p_{n-k}=\frac{(q^n-1)(q^{n-1}-1)...(q^{k+1}-1)}{(q^{n-k}-1)(q^{n-k-1}-1)...(q-1)}.$$

故只需证：

$$\frac{(q^n-1)(q^{n-1}-1)...(q^{n-k+1}-1)}{(q^k-1)(q^{k-1}-1)...(q-1)}=\frac{(q^n-1)(q^{n-1}-1)...(q^{k+1}-1)}{(q^{n-k}-1)(q^{n-k-1}-1)...(q-1)}.$$

只需证：

$$\begin{aligned}&(q^n-1)(q^{n-1}-1)...(q^{n-k+1}-1)(q^{n-k}-1)(q^{n-k-1}-1)...(q-1)\\&=(q^k-1)(q^{k-1}-1)...(q-1)(q^n-1)(q^{n-1}-1)...(q^{k+1}-1).\end{aligned}$$

而上式显然成立，故 $p_k=p_{n-k}$，$0\leqslant k\leqslant n$，故 $B_n(k)$ 是秩对称的。

（d）(法一)：见图片 3.

先证每个元素 $x\in B_n(q)_k$ 被 $\boldsymbol{(n-k)}=1+q+q^2+...+q^{n-k-1}$ 个元覆盖，在第 P_k 层，元素 x 是 k 维的，覆盖元素 x 的元素 y 应该是 $k+1$ 维的，且包含 x 中的元素。由空间 V 是 n 维的，故在 P_{k+1} 层，元素 α_{k+1} 应该在 $n-1$ 维中选取，故共有 $q^{n-k}-1$ 个选取方式（减去 1 是因为要除去 $(0,0,0,...,0)$），又由 F_q 是 q 元域，故有 $\frac{q^{n-k}-1}{q-1}$ 种选取方式，又由 $\frac{q^{n-k}-1}{q-1}=q^{n-k-1}+q^{n-k-2}+...+q+1$，故 x 被 $\boldsymbol{(n-k)}=1+q+q^2+...+q^{n-k+1}$ 个元素覆盖。例如：
在 (a) 中的 $B_3(2)$ 当 $k=1$ 时，$<\alpha_2>=\{(0,0,0),(1,0,0)\}$，剩下 $n-k=3-1=2$ 维，可取 $(1,0)(0,1)(1,1)$ 即：$1+q=1+2=3$ 个。
下证前半部分：
上面同理得：$k-1$ 层的每一个元素被 $\frac{q^{n-k+1}-1}{q-1}$ 个元素覆盖，而 $k-1$ 层共 P_{k-1} 个元素，因此，在第 $k-1$ 层与第 k 层共有：$\frac{q^{n-k+1}-1}{q-1}P_{k-1}$ 条覆盖关系，而第 k 层共有 P_k 个元，且这 P_k 个元对覆盖关系而言相互对称，故对第 k 层任一元素 x，共有：

$$\left(\frac{q^{n-k+1}-1}{q-1}P_{k-1}\right)\frac{1}{P_k}=\frac{q^k-1}{q-1}=1+q+q^2+...+q^{k-1}$$

个元素被其覆盖。证毕。
注：对：

$$\left(\frac{q^{n-k+1}-1}{q-1}P_{k-1}\right)\frac{1}{P_k}=\frac{q^k-1}{q-1}.$$

(d) 下证 $\forall x \in B_n(q)_k$，x 被 $[n-k] = 1+q+\cdots+q^{n-k-1}$ 个元素覆盖

证 令 $x = L(v_1,\cdots,v_k)$，覆盖 x 的元素为 $k+1$ 维线性子空间.

① 先找线性无关的向量 $u_1,\cdots,u_{k+1}$ 满足 $v_1,\cdots,v_k \leftrightarrow u_1,\cdots,u_k$，且 $u_{k+1} \nrightarrow v_1,\cdots,v_k$.

u_1 有 q^k-1 种选择，u_2 有 q^k-q 种选择，$\cdots$，u_k 有 q^k-q^{k-1} 种选择. u_{k+1} 有 q^n-q^k 种选择.

则这样的 $u_1,\cdots,u_{k+1}$ 有 $(q^k-1)(q^k-q)\cdots(q^k-q^{k-1})(q^n-q^k)$ 个.

② 下求线性无关的向量 $u_1',\cdots,u_{k+1}'$ 满足 $u_1',\cdots,u_{k+1}' \leftrightarrow u_1,\cdots,u_{k+1}$，$u_{k+1}' \nrightarrow u_1,\cdots,u_k$ 且 $u_{k+1}' \to u_1,u_2,\cdots,u_{k+1}$.

u_1' 有 q^k-1 种选择. u_2' 有 q^k-q 种选择，$\cdots$，u_k' 有 q^k-q^{k-1} 种选择. u_{k+1}' 有 $q^{k+1}-q^k$ 种选择.

则这样的 $u_1'\cdots u_{k+1}'$ 有 $(q^k-1)(q^k-q)\cdots(q^k-q^{k-1})(q^{k+1}-q^k)$ 个.

综上，覆盖 x 的元素为 $k+1$ 维线性子空间的个数为

$$\frac{(q^k-1)(q^k-q)\cdots(q^k-q^{k-1})(q^n-q^k)}{(q^k-1)(q^k-q)\cdots(q^k-q^{k-1})(q^{k+1}-q^k)} = 1+q+\cdots+q^{n-k-1}.$$

□

图 3:

只需证：

$$(q^{n-k+1}-1)P_{k-1}=(q^k-1)P_k.$$

只需证：

$$(q^{n-k+1}-1)\frac{(q^n-1)\cdot...\cdot(q^{n-k+2}-1)}{(q^{k-1}-1)\cdot...\cdot(q-1)}=\frac{(q^k-1)(q^n-1)\cdot...\cdot(q^{n-k+1}-1)}{(q^k-1)(q^{k-1}-1)\cdot...\cdot(q-1)}.$$

而上式显然成立。

（法二）：我们套用（b）中方法，由 k 维数的线性空间都同构，则包含的 $k+1$ 维线性空间的个数相同。在特定的 k 维空间中选出 $k-1$ 维子空间。有：

$$\binom{\boldsymbol{k}}{\boldsymbol{k-1}}=\frac{(q^k-1)\cdot...\cdot(q^2-1)}{(q^{k-1}-1)\cdot...\cdot(q-1)}=\frac{q^k-1}{q-1}=1+q+q^2+...+q^{k-1},$$

即 x 覆盖 $\boldsymbol{(k)}$ 个元素。
同理有：

$$\binom{\boldsymbol{k+1}}{\boldsymbol{k}}=\frac{q^{k+1}-1}{q-1}.$$

而有 $\binom{k+1}{k}$ 个秩为 $k+1$ 的元素，$\binom{n}{k}$ 个秩为 k 的元素。所以:

$$\binom{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{k+1}}\binom{\boldsymbol{k+1}}{\boldsymbol{k}}=\binom{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{k}}\cdot\boldsymbol{(n-k)}$$

（注：Hasse 图中上下两层中间连线的数量）
得：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{(n-k)}&=\frac{\frac{(q^n-1)\cdot...\cdot(q^{n-k}-1)}{(q^{k+1}-1)\cdot...\cdot(q-1)}\cdot\frac{q^{k+1}-1}{q-1}}{\frac{(q^n-1)\cdot...\cdot(q^{n-k+1}-1)}{(q^k-1)\cdot...\cdot(q-1)}}\\&=\frac{q^{n-k}-1}{q-1}\\&=1+q+q^2+...+q^{n-k-1}.\end{aligned}$$

证毕。

注：被覆盖的元素个数是一个常数，需要证明。(由对称性)。

（e）由记号：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{(n-k)}&=1+q+q^2+...+q^{n-k-1},\\\boldsymbol{(k)}&=1+q+q^2+...+q^{k-1}.\end{aligned}$$

$$
\begin{tikzcd}
i+1\text{层} \arrow[d, shift right, "D_{i+1}"'] \\
i\text{层} \arrow[u, shift right, "U_i"'] \arrow[d, shift right, "D_i"'] \\
i-1\text{层} \arrow[u, shift right, "U_{i-1}"']
\end{tikzcd}
$$

设 $x \in B_n(q)_i$，由：

$$((\boldsymbol{n-i}) - (\boldsymbol{i}))I_i(x) = ((\boldsymbol{n-i}) - (\boldsymbol{i}))x.$$

$$
\begin{aligned}
D_{i+1}U_i(x) &= D_{i+1}\left(\sum_{y\in B_n(q)_{i+1}\ \ y>x} y\right) \\
&= \sum_{y\in B_n(q)_{i+1}\ \ y>x} (D_{i+1}y) \\
&= \sum_{y\in B_n(q)_{i+1}\ \ y>x} \left(\sum_{z\in B_n(q)_i\ \ y>z} z\right).
\end{aligned}
$$

若 $|x\cap z|$ 的维数 $< i-1$，即 x 与 z 不相同的量至少是 2，于是不存在使得 $x<y, z<y$ 的 $y \in B_n(q)_{i+1}$，故此时上式展开时，z 前的系数为 0。
若 $|x\cap z|$ 的维数 $= i-1$，即 x 与 z 只相差一项，只存在一个这样的 y，即 $y = x\cup z$。
若 $|x\cap z|$ 的维数 $= i$，即 $x = z$，则共有 $(\boldsymbol{n-i})$ 个这样的 y（由（d）知）。
因此：有

$$D_{i+1}U_i(x) = (\boldsymbol{n-i})x + \sum_{z\in B_n(q)_i\ \ |x\cap z|=i-1} z.$$

同理由：

$$
\begin{aligned}
U_{i-1}D_i(x) &= U_{i-1}\left(\sum_{y\in B_n(q)_{i-1}\ \ y<x} y\right) \\
&= \sum_{y\in B_n(q)_{i-1}\ \ y<x} \left(\sum_{z\in B_n(q)_i\ \ y<z} z\right).
\end{aligned}
$$

若 $|x\cap z|$ 的维数 $< i-1$，这样的 y 不存在，z 前的系数为 0。
若 $|x\cap z|$ 的维数 $= i-1$，即 $y = x\cup z$，这样的 y 只存在一个

若 $|x\cap z|$ 的维数 $=i$，即 $x=z$，这样的 y 由（d）知有 $\boldsymbol{(i)}$ 个。
因此有：

$$U_{i-1}D_i(x)=\boldsymbol{(i)}x+\sum_{z\in B_n(q)_i\ \ |x\cap z|=i-1} z.$$

综上得：

$$D_{i+1}U_i(x)-U_{i-1}D_i(x)=\boldsymbol{(n-i)}x-\boldsymbol{(i)}x,$$

$$D_{i+1}U_i-U_{i-1}D_i=(\boldsymbol{(n-i)}-\boldsymbol{(i)})I_i.$$

证毕。

（f）令 $[U_i]$ 表示 U_i 关于基 $B_n(q)_i$ 和 $B_n(q)_{i+1}$ 的矩阵，$[D_i]$ 表示 D_i 关于基 $B_n(q)_i$ 和 $B_n(q)_{i-1}$ 的矩阵。设：

$$U_i(x_1,x_2,...,x_m)=(y_1,y_2,...,y_n)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1m}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2m}\\ . & . & . & \cdots & .\\ . & . & . & \cdots & .\\ . & . & . & \cdots & .\\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nm}\end{pmatrix}_{n\times m}.$$

其中：$a_{ij}\in\{0,1\},\ 1\leqslant i\leqslant n,\ 1\leqslant j\leqslant m.$
因此：覆盖 x_1 的量应该有：$\{a_{11}y_1,a_{21}y_2,...,a_{n1}y_n\}$；覆盖 x_2 的量应该有：$\{a_{12}y_1,a_{22}y_2,...,a_{n2}y_n\}$;...;覆盖 x_m 的量应该有:$\{a_{1m}y_1,a_{2m}y_2,...,a_{nm}y_n\}$。
由此可得：覆盖 y_1 的量应该有：$\{a_{11}x_1,a_{12}x_2,...,a_{1m}x_m\}$，以此类推可得 $y_2,y_3,....$ 覆盖的量。由：

$$D_{i+1}(y_1,y_2,...,y_n)=(x_1,x_2,...,x_m)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & \cdots & a_{n1}\\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & \cdots & a_{n2}\\ . & . & . & \cdots & .\\ . & . & . & \cdots & .\\ . & . & . & \cdots & .\\ a_{1m} & a_{2m} & a_{3m} & \cdots & a_{nm}\end{pmatrix}_{m\times n}.$$

故 $[U_i]=[D_{i+1}]$，即：$[U_{i-1}]=[D_i]^t$，故 $U_{i-1}D_i$ 是半正定的，有非负实特征值。由（e）

$$D_{i+1}U_i-U_{i-1}D_i=(\boldsymbol{(n-i)}-\boldsymbol{(i)})I_i.$$

因此：$D_{i+1}U_i$ 的特征值可由 $U_{i-1}D_i$ 的特征值加上 $\boldsymbol{(n-i)}-\boldsymbol{(i)}$ 得到。而由于：

$$\boldsymbol{(n-i)}=1+q+q^2+...+q^{n-i-1}=\frac{q^{n-i}-1}{q-1},$$

$$(\boldsymbol{i}) = 1 + q + q^2 + ... + q^{i-1} = \frac{q^i - 1}{q - 1}.$$

故：当 $(\boldsymbol{n-i}) - (\boldsymbol{i}) > 0$ 时：

$$\frac{q^{n-i}-1}{q-1} > \frac{q^i-1}{q-1}\ (q>1) \Rightarrow q^{n-i} > q^i \Rightarrow n-i > i \Rightarrow i < \frac{n}{2}.$$

此时 $D_{i+1}U_i$ 的特征值都是非零正数，故 $D_{i+1}U_i$ 可逆，$rank(D_{i+1}U_i) = rank(U_i) = m$，$U_i$ 列满秩。故当 $i < \frac{n}{2}$ 时，U_i 是单射；同理得 $i \geqslant \frac{n}{2}$ 时，U_i 是满射，又由于 U_i 是序提升算子。因此由定理 4.5 得：$i < \frac{n}{2}$ 时，存在序匹配 $\mu : B_n(q)_i \to B_n(q)_{i+1}$；$i \geqslant \frac{n}{2}$ 时，存在序匹配 $\mu : B_n(q)_{i+1} \to B_n(q)_i$。至此，由定理 4.4 得 $B_n(q)$ 是秩单峰的且有 sperner 性质。

5、（未证出）

（1）若 $S_1 = S_2 = ... = S_k$，则 $P = 2^{S_1}$，此时 P 显然是秩单峰的。

（2）若 $S_i \cap S_j = \emptyset,\ i \neq j$ 即：$S_1, S_2, ..., S_k$ 都互不相交，令 $\#S_1 = \#S_2 = ... = \#S_k = n$，由 $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, ..., \binom{n}{n}$ 是帕斯卡三角形的第 n 行，是秩单峰的，则 $k\binom{n}{0}, k\binom{n}{1}, ..., k\binom{n}{n}$ 显然也是秩单峰的。

6、设 $A_1, A_2, ...A_j$ 是 j 个反链，$P_{i+1}, ..., P_{i+j}$ 是最多的 j 层，对称链分解 $C_1, C_2, ..., C_N$，设 A 为 j 个反链的并集，P 为 j 层水平的并，有 $|P \cap C_k| \leqslant j$（因为 C_k 最多有 P_{i+1} 到 P_{i+j} 中 j 层），$|A \cap C_k| \leqslant j$（因为每条反链最多在每条对称链上有一个点）。现讨论 $|A \cap C_k| > |P \cap C_k|$，当 $|P \cap C_k| = j$ 时，则上述情况不可能。当 $|P \cap C_k| < j$ 时，得：$C_k \subset P$（否则存在 $x \in C_k \setminus P$），得 $A \cap C_k \subseteq C_k \subset P$，而上述情况不存在。所以 $|A \cap C_k| \leqslant |P \cap C_k|$，证毕。

(上述似乎有问题，见下述答案)

Let $C_1, C_2, ..., C_N$ be a symmetric chain decomposition, $A_1, A_2, ...A_m$ be all antichains of P. Suppose $P = P_1 \uplus P_2 \uplus \cdots \uplus P_n$, where $P_{i+1}, P_{i+2}, ..., P_{i+j}$ is the largest size j levels of P. Suppose A be set of the largest size of a union of j antichains. Now, we prove

$$\#(P_{i+1} \uplus P_{i+2} \uplus \cdots \uplus P_{i+j}) = \#A.$$

First, the $P' = P_{i+1} \uplus P_{i+2} \uplus \cdots \uplus P_{i+j}$ is a union of j antichains, So we have $\#P' \leq \#A$. Next, we prove $\#P' \geq \#A$. By

$$\#A = \sum_{k=1}^{N} \#(A \cap C_k), \quad \#P' = \sum_{k=1}^{N} \#(P' \cap C_k),$$

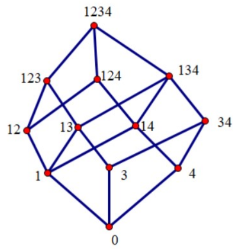
we just need to prove $\#(A \cap C_k) \leq \#(P' \cap C_k)$. Because A is a union of j antichains, we know $\#(A \cap C_k) \leq j$ (Pigeonhole Principle). By P' is a union of j levels of P, we have $\#(P' \cap C_k) \leq j$. If $\#(P' \cap C_k) = j$, then we have $\#(A \cap C_k) \leq \#(P' \cap C_k)$. If $\#(P' \cap C_k) < j$, then $C_k \subseteq P'$. (if not, there is $x \in C_k \setminus P'$. Then there is $x' \in C_k$. So $\#(P' \cap C_k) = j$.) So $P' \cap C_k = C_k$ and $A \cap C_k \subseteq C_k = P' \cap C_k$. Therefore $\#(A \cap C_k) \leq \#(P' \cap C_k)$. This completes the proof.

5 第五章 布尔代数的群作用

1、（a）由 ι 是单位元，$\pi=(12)$，以下 $\{1,2,3,4\}$ 的子集 $\{i,j\}$ 记为 ij。故由:$\pi\cdot 1=2, \pi\cdot 2=1, \pi\cdot 3=3, \pi\cdot 4=4$ 得：

$$\begin{aligned}
&\pi\cdot 12=12,\ \pi\cdot 13=23,\ \pi\cdot 14=24,\ \pi\cdot 23=13,\\
&\pi\cdot 24=14,\ \pi\cdot 34=34,\ \pi\cdot 123=123,\ \pi\cdot 124=124,\\
&\pi\cdot 234=134,\ \pi\cdot 134=234,\ \pi\cdot 1234=1234,
\end{aligned}$$

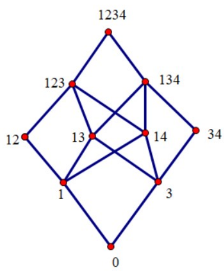
下图中的每个点（轨道）都是用轨道中的某个元素来标记：



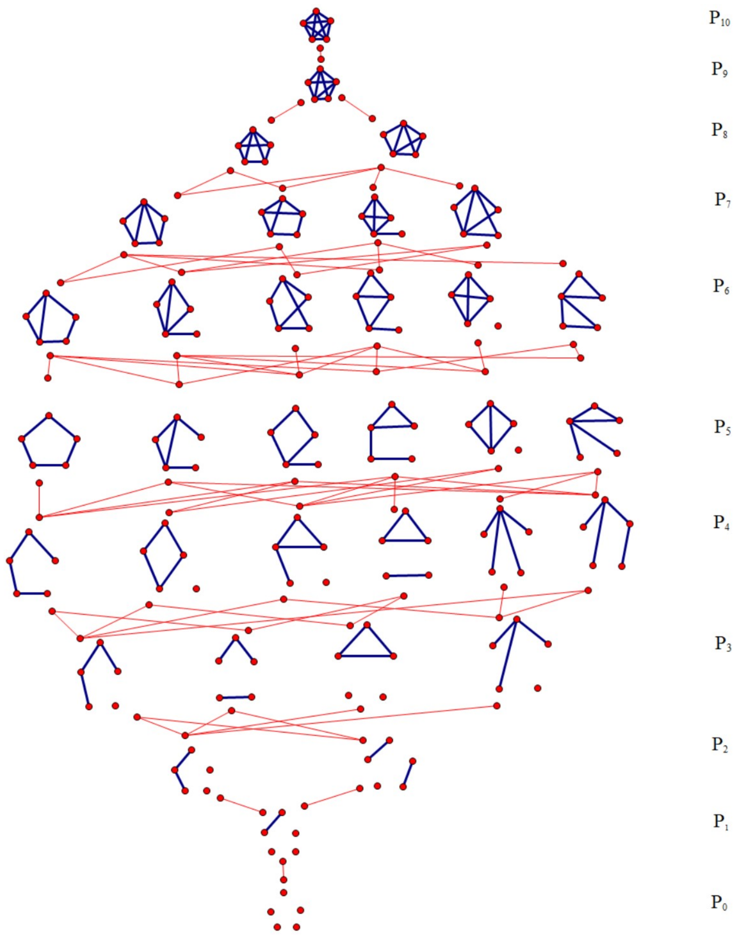
（b）由 $\pi=(12)(34)$ 轨道为:

$$\begin{aligned}
&\{1,2\},\ \{3,4\},\ \{12\},\\
&\{13,24\},\ \{14,23\},\ \{34\},\\
&\{123,124\},\ \{134,234\},\ \{1234\},
\end{aligned}$$

同上标记，Hasse 图如下：



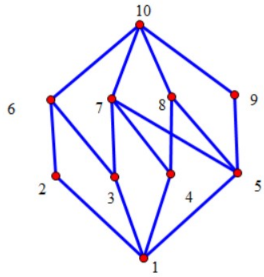
2、其 Hasse 图如下：



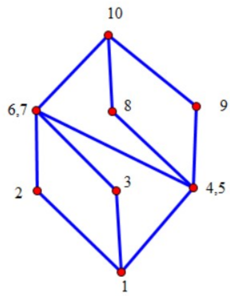
由图可知：它的最大反链大小为 6. 这样的反链有 $2^4+2+3-1=20$ 个。（依赖于图）

(1)P_4 层全体；(2)P_5 层全体；(3)P_6 层全体；(4) 将 P_6 层的第一个图换成 P_5 层的第一个图，此时的 P_6 层全体；(5) 将 P_5 层的第五个图换成 P_6 层的第五个图，此时的 P_5 层全体；由于 B_X/G 是秩为 n 的分次偏序集，且是对称的，因此对偶的有：(6) 将 P_4 层的第一个图换成 P_5 层的第一个图，此时的 P_4 层全体；(7) 将 P_5 层的第四个图换成 P_4 层的第四个图，此时的 P_5 层全体。(8)...

3、由于偏序关系可以由 Hasse 图唯一确定。举反例 P 的 Hasse 图如下：



令 $G=\{e,\pi\}$，$\pi: 6\to 7; 7\to 6; 4\to 5; 5\to 4$ 其余不变，则：$\pi^2=e$ 故 G 为群。则：P/G 的 Hasse 图如下：



但此图最大反链 $\{2,3,8,9\}$ 有四个元，故不具有 Sperner 性质。

4、(下述做法不对) 假设此群 G 存在，在原 B_7 的 Hasse 图中：从 $0\sim 7$ 每层的元素个数分别为：$1,7,21,35,35,21,7,1$。但在 $P\cong B_7/G$ 的 Hasse 图中的第一层有一个元素，说明 $\{1,2,3,4,5,6,7\}$ 在一个轨道，因此 $<(1234567)>\subseteq G$，而 $<(1234567)>$ 将 B_7 第二层中的元素分为 3 类：

$$①:\{12,23,34,45,56,67,17\},$$

$$②:\{13,24,35,46,57,16,27\},$$

$$③:\{14,25,36,47,15,26,37\}.$$

而在 B_7/G 中第二层只有两个元素，即只有两个轨道。因此这三类有三种分类结果：①+②,③ 或者 ①+③,② 或者 ②+③,① 从而形成两个轨道。现在考虑 ①+②,③，由 $12\in$ ①$,13\in$ ②，因此存在 $\pi\in G$ 使得 $\pi\cdot 12=13$，所以 $\pi=(1)(...23...)$，因为 $25\in$ ③ 因此：$\pi\cdot 25\in$ ③，所以

$$(1)(...23...)\cdot 25=\begin{cases}36\in ③\\ 37\in ③\end{cases}$$

当 $(...23...)\cdot 25=36$ 时，$\pi\cdot 5=6,\pi=(1)(..23..56..)$，此时 $\pi\cdot 15=16\in$ ② 矛盾。当 $(...23...)\cdot 25=37$ 时，$\pi\cdot 5=7,\pi=(1)(..23..57..)$，此时 $\pi\cdot 15=17\in$ ① 矛盾。同理可考虑其他两种分类。同样会产生矛盾，故 G 不存在。

5、（a）由 B_n 是秩为 n 的分次偏序集，任取 $x \in \{i_1, i_2, ..., i_k\} \in B_n, 1 \leqslant k \leqslant n$ 令 B_n 与长度为 n 的 $\{0,1\}$ 集合的线性排列等同，若 $x \in \{i_1, i_2, ..., i_k\} \in B_n$ 则有排列 $(0...1...1...1...0)$ 其中 1 出现的位置分别为 $i_1, i_2, ..., i_k$，显然二者是一一对应的。令 $G =< (123...n) >$，则对任意 $\pi \in G, \pi \cdot x = \{\pi(i_1), \pi(i_2), ..., \pi(i_k)\} \in B_n$，此群作用对应于长度为 n 的所有 $\{0,1\}$ 集合的一个圆排列，由于 N_n 是长度为 n 的所有 $(0,1)-$ 项链的集合。因此 $N_n \cong B_n/G$，故 N_n 是秩对称的，秩单峰的，且具有 Sperner 性质。

注：秩对称的证明，设 $x \in N_n$，x 表示长度为 n 的 $(0,1)-$ 项链，令 $\overline{x}$ 表示将 x 中的“1”变为“0”，“0”变为“1”，则 $\overline{x} \in N_n$，因此若 x_i 为 N_n 中秩为 i 的一条项链，则 $\overline{x}$ 表示 N_n 中秩为 $n-i$ 的一条项链，存在 $x_i \Leftrightarrow$ 存在 $\overline{x}$，用 $|x_i|$ 表示 x_i 的权，则 $|x_i| = i \Leftrightarrow |\overline{x}| = n-i$，因此 $|(N_n)_i| = |(N_n)_{n-i}|$，故 N_n 是秩对称的。

（b）略

6、未解决的公开问题。

7、由题意：$M = \{a_1 \cdot 1, a_2 \cdot 2, ..., a_k \cdot k\}$ 令 $n = \sum_{i=1}^{k} a_i$，B_n 是秩为 n 的布尔代数。现将重集 M 换一种表达方式，为：

$$M = \left\{1^1, 1^2, ..., 1^{a_1}, 2^{a_1+1}, ..., 2^{a_1+a_2}, 3^{a_1+a_2+1}, ..., k^{\sum_{i=1}^{k-1} a_i+1}, ..., k^{\sum_{i=1}^{k} a_i}\right\}.$$

显然此重集有 a_i 个 i，与题中的重集等价。我们需要找到适当的 n 和 G_n 的一个子群 G 使得 $B_M \cong B_n/G$，由于 B_M 的第一层元素分别为 $1, 2, ..., k$。因此 B_n/G 中的第一层轨道要有 k 个。令：

$$G = S_{[1,a_1]} \times S_{[a_1+1,a_1+a_2]} \times \cdots \times S_{[a_1+\cdots a_{k-1}+1,a_1+\cdots+a_k]},\ n = \sum_{i=1}^{k} a_i.$$

则：$B_M \cong B_n/G$，由定理 5.8，B_M 是秩对称的，秩单峰的且具有 Sperner 性质。

***********(以下有误)**********************

以题中 $a_1 = 2, a_2 = 3$ 为例演示：$M = \{2 \cdot 1, 3 \cdot 2\} = \{1^1, 1^2, 2^3, 2^4, 2^5\}$ 令 $G =< (12)(345) >, \pi = (12)(345)$ 则：$\pi \cdot 1 = 2, \pi \cdot 2 = 1, \pi \cdot 3 = 4, \pi \cdot 4 = 5, \pi \cdot 5 = 3$. 因此第一层有两个轨道 $\{1,2\}$,$\{3,4,5\}$ 现考虑第二层：（用箭向表示在 π 的作用下的转变）

$$\begin{cases} \pi \cdot 12 = 12 \\ \pi \cdot 13 = 24 \to 15 \to 23 \to 14 \to 25 \to 13 \\ \pi \cdot 34 = 45 \to 35 \to 34. \end{cases}$$

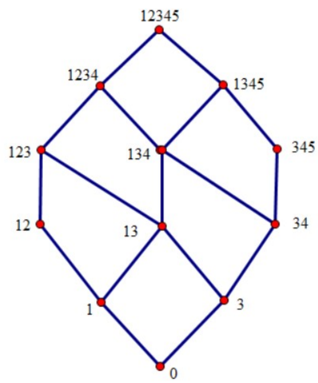
因此第二层有三个轨道 $\{12\},\{13,24,15,23,14,25\},\{34,45,35\}$ 现在考虑第三层有三个轨道：

$$\begin{cases}\pi\cdot 123=124\to 125\to 123\\ \pi\cdot 134=245\to 135\to 234\to 145\to 235\to 134\\ \pi\cdot 345=345.\end{cases}$$

故第四层有两个轨道：

$$\begin{cases}\pi\cdot 1234=1245\to 1235\to 1234\\ \pi\cdot 1345=2345.\end{cases}$$

显然第五层为 $\{12345\}$，此时 Hasse 图如下（与题中一致）：



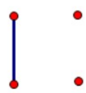
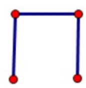
8、未解决的公开问题。

9、（a）略

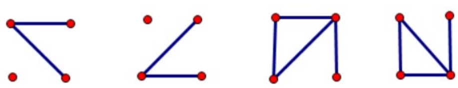
（b）由（a）当 $p\neq 0(mod 4)$ 时，φ 是可逆的，即 φ 是双射。因此对图 G 与 G' 不同，则 $\varphi(G)=G_1+G_2+...+G_p$，$\varphi(G')=G_1'+G_2'+...+G_p'$，即 $\varphi(G)\neq\varphi(G')$，即 $G_1,G_2,...,G_p$ 唯一决定了 G。

（c）未解决公开问题

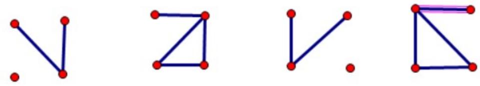
（d）两个有不同边数的四顶点图：

G:  G': 

则：G 的无标号图 G_i 为：

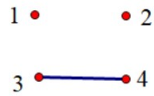


G' 的无标号图 G_i 为：

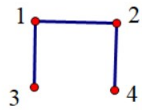


故 G 与 G' 有相同的无标号 G'.

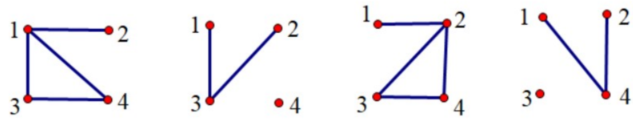
（e）$P=4$ 时，G 不一定是可弱转接重建的。反例如下：



与



有相同的标号图 G_i:



10、证明：若对某个 $j \leqslant \frac{n}{2}$，G 传递地作用于 j 元子集。即对任意地 j 元子集 S 和 T，存在 $\pi \in G$，使得：$\pi \cdot S = T$，对 $0 \leqslant i \leqslant j$，当 $i=j$ 时显然结论成立。当 $i<j \leqslant \frac{n}{2}$ 时，对任意两个 $j-1$ 元子集 $\alpha = \{x_1, x_2, ..., x_{j-1}\}$ 与 $\beta = \{y_1, y_2, ..., y_{j-1}\}$，由于 $|\alpha| = |\beta| = j-1$，故 $|\alpha \cup \beta| < n$，故存在 $m \in X$ 但 $m \notin \alpha \cup \beta$ 因此对 j 元子集 $\alpha' = \{x_1, x_2, ..., x_{j-1}, m\}$ 与 $\beta' = \{y_1, y_2, ..., y_{j-1}, m\}$，存在 $\pi \in G$ 使得 $\pi \cdot \alpha' = \beta'$，当把 π 限制在集合 α 上时，有 $\pi|_\alpha \cdot \alpha = \beta$，因此存在 $\varphi = \pi|_\alpha$ 使得 $\varphi\alpha = \beta$，递归地对 $0 \leqslant i \leqslant j$,$G$ 传递的作用于 i 元子集上。

注：此证明存在问题，从限制开始就出错了。那如何直接证明怎么证？用书中的结论怎么证明？（见下面答案）

若 $i=j$，则显然结论成立。

若 $0 \le i < j \le \frac{n}{2}$，我们需要证明对于 i 元子集 S,T，存在 $\pi \in G$，使得 $\pi(S)=T$。我们递归的证明：若 $i=j-1$，则 $|S \cup T| \le 2j-2 \le n-2$。因此存在 $x \in X \setminus (S \cup T)$，使得 $S \cup \{x\}, T \cup \{x\}$ 为 j 元子集。于是存在 $\pi \in G$，使得 $\pi(S \cup \{x\}) = T \cup \{x\}$。因此在 B_x/G 中，$p_j = 1$。

由于 B_x/G 为秩为 n 的分次偏序集，且秩对称，秩单峰具有 Sperner 性质。因此有

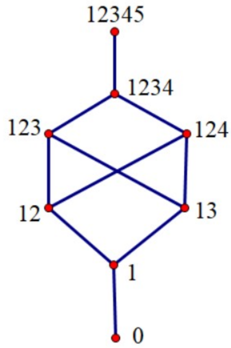
$$1 \le p_0 \le p_1 \le p_2 \le \cdots \le p_j = 1,$$

因此

$$p_0 = p_1 = p_2 = \cdots = p_j = 1.$$

故 G 传递的作用于 i 元子集。

11、图如下：



由 $G=<(12345)>$，有：

$$\begin{cases} G\cdot 1=\{1,2,3,4,5\} \\ G\cdot 12=\{12,23,34,45,15\} \\ G\cdot 13=\{13,24,35,14,25\} \\ G\cdot 123=\{123,234,345,145,125\} \\ G\cdot 124=\{124,235,134,245,135\} \\ G\cdot 1234=\{1234,2345,1345,1245,1235\} \\ G\cdot 12345=\{12345\}. \end{cases}$$

要计算：

$$\begin{cases} \widehat{U_2}(12)=c_1\cdot 123+c_2\cdot 124 \\ \widehat{U_2}(13)=c_1'\cdot 123+c_2'\cdot 124. \end{cases}$$

现计算：

$$\begin{aligned} U_2(v_{12}) &= c_1\cdot v_{123}+c_2\cdot v_{124} \\ &= U_2\left(\sum_{x\in 12} x\right) \\ &= U_2(12+23+34+45+15) \\ &= 2(123+125+145+234+345)+(124+235+134+245+135) \\ &= 2\cdot v_{123}+1\cdot v_{124}. \end{aligned}$$

得：$\widehat{U_2}(12) = 2\cdot 123 + 1\cdot 124$ 同理有：

$$\begin{aligned}
U_2(v_{13}) &= c_1'\cdot v_{123} + c_2'\cdot v_{124}\\
&= U_2\left(\sum_{x\in 13} x\right)\\
&= U_2(13+24+35+14+15)\\
&= 2(124+235+134+245+135)+(123+234+345+145+125)\\
&= 1\cdot v_{123} + 2\cdot v_{124}.
\end{aligned}$$

得：$\widehat{U_2}(13) = 1\cdot 123 + 2\cdot 124$ 因此：

$$\widehat{U_2}(12,13) = (123,124)\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}.$$

12、（未证完）由 $f(x), g(x)$ 都是正系数的 log—凹多项式。则 $f(x), g(x)$ 的系数序列均是单峰的，且 $f(x)g(x)$ 也是正系数多项式。现令：不妨设 $n\geqslant m$

$$f(x)=\sum_{i=0}^{n} a_i x^i,\quad g(x)=\sum_{j=0}^{m} b_j x^j.$$

则：

$$f(x)g(x)=\sum_{s=0}^{m+n}\left(\sum_{i+j=s} a_i b_j\right)x^s.$$

需证：

$$\left(\sum_{i+j=s} a_i b_j\right)^2 \geqslant \left(\sum_{i+j=s-1} a_i b_j\right)\left(\sum_{i+j=s+1} a_i b_j\right).$$

现在我们换一种书写方式：

$$f(x)g(x)=\Big(1,x,x^2,...,x^n\Big)\begin{pmatrix}a_0\\a_1\\a_2\\.\\.\\.\\a_n\end{pmatrix}\Big(b_0,b_1,...,b_m,0,...,0\Big)\begin{pmatrix}1\\x\\x^2\\...\\x^m\\...\\x^n\end{pmatrix}$$

$$=\Big(1,x,x^2,...,x^n\Big)\begin{pmatrix}a_0b_0 & a_0b_1 & ... & a_0b_m & 0 & 0... & 0\\ a_1b_0 & a_1b_1 & ... & a_1b_m & 0 & 0... & 0\\ . & . & ... & . & . & .... & .\\ . & . & ... & . & . & .... & .\\ . & . & ... & . & . & .... & .\\ a_nb_0 & a_nb_1 & ... & a_nb_m & 0 & 0... & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\x\\x^2\\...\\x^m\\...\\x^n\end{pmatrix}.$$

此矩阵是 $(n+1)\times(n+1)$ 的，且矩阵的每一行每一列均是 log-凹的，无内部零点，单峰的。现在需要证明此矩阵自西南方向到东北方向的对角线元素的和的平方，大于等于两边和的平方的乘积。由：

$$(a_1b_0+a_0b_1)^2=a_1^2b_0^2+2a_0b_1a_1b_0+a_0^2b_1^2,$$

$$a_0b_0(a_2b_0+a_1b_1+a_0b_2)=a_0b_0a_2b_0+a_0b_0a_1b_1+a_0b_0a_0b_2.$$

显然有：

$$(a_1b_0+a_0b_1)^2\geqslant a_0b_0\cdot(a_2b_0+a_1b_1+a_2b_2).$$

由数学归纳法，假设对 s 有：

$$\left(\sum_{i+j=s}a_ib_j\right)^2\geqslant\left(\sum_{i+j=s-1}a_ib_j\right)\left(\sum_{i+j=s+1}a_ib_j\right).$$

则对 $s+1$，

6 第六章 杨图和 q-二项式系数

1、(a)(未证完)由题意，$A(m,n)$ 是主对角线元素为 0 的对称矩阵，且 $A(m,n)$ 是 $\binom{m+n}{m}\times\binom{m+n}{m}$ 阶矩阵，$A(m,n)$ 非奇异等价于 $|A(m,n)|\neq 0$，现在要证由 $|A(m,n)|\neq 0$ 推出 $\binom{m+n}{m}$ 是偶数。或者等价的由 $\binom{m+n}{m}$ 是奇数推出 $|A(m,n)|=0$。

观察 $L(1,4)$ 的邻接矩阵 $A(1,4)$:

$$\begin{pmatrix}0&1&0&0&0\\1&0&1&0&0\\0&1&0&1&0\\0&0&1&0&1\\0&0&0&1&0\end{pmatrix}.$$

观察 $L(2,3)$ 的邻接矩阵 $A(2,3)$:

$$\begin{pmatrix}0&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\1&0&1&1&0&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&1&1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&1&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0&1&0&0&0\\0&0&1&1&0&0&1&1&0&0\\0&0&0&0&1&1&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&1&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&0&1&1&0&1\\0&0&0&0&0&0&0&0&1&0\end{pmatrix}.$$

(b)未解决问题

(c)非常困难

2、(a)比较困难

(b)这一结果最早出自文章：Germain. Kreweras, 《Sur une classe de problèmes de dénombrement liés au treillis des partitions des entiers》. Cahiers du Bureau universitaire de recherche opérationnelle Série Recherche, Volume 6 (1965), pp. 9-107.

也是下面书中 P. A. MacMahon, Combinatory Analysis (1915,1916),reprinted Chelsea 1960. 第二卷 P242 页结果的一个特殊情况。

作者建议看论文 G. Kreweras and H. Niederhausen, Solution of an enumerative problem connected with lattice paths, European J. Combin. 2 (1981), 55-60.

也见 OEIS 网站中的序列 [A111910].

3、考虑 $\mu=(8,8,4,4)$，经作者验算，Y_μ 的秩分别为：

$$
\begin{aligned}
&p_0=0\ \ p_1=1\ \ p_2=3\ \ p_3=3\ \ p_4=5\ \ p_5=6\\
&p_6=8\ \ p_7=10\ \ p_8=12\ \ p_9=17\ \ p_{10}=21\ \ p_{11}=22\\
&p_{12}=23\ \ p_{13}=28\ \ p_{14}=30\ \ p_{15}=30\ \ p_{16}=31\ \ p_{17}=26\\
&p_{18}=24\ \ p_{19}=18\ \ p_{20}=14\ \ p_{21}=8\ \ p_{22}=5\ \ p_{23}=2\\
&p_{24}=1.
\end{aligned}
$$

猜测：Y_μ 应该不是秩单峰的，且 $\mu=(8,8,4,4)$ 应该是一个反例，单计算结果却相反，应该是上述的秩中计算结果出现了错误。试找出。

4、（a）由：

					...		
					...		

令序匹配 $\mu:L(2,n)_i\to L(2,n)_{i+1}$,$i<n$ 为 $\mu(\lambda)=\lambda'$，令 $\lambda=(x,y)$ 则 $\lambda'=\mu(\lambda)=(x+1,y)$，其中 x 表示第一个分量大小，y 表示第二个分量大小，由 $i<n$，因此 $x+y<n$,$x+1+y<n+1<2n$，定义合理。从杨图的角度看，即在 λ 的杨图中第一行的右边方格处在延伸一个方格得到 λ'，$\lambda'\in L(2,n)_{i+1}$，且对不同的 λ，有不同的 λ'，因此 μ 是 $L(2,n)_i\to L(2,n)_{i+1}$ 的序匹配。

（b）（c）详情请参考：Guoce Xin,and Yueming Zhong,an explicit order matching for $L(3,n)$ from several approaches and its extension for $L(4,n)$.arXiv:2104. 11003v1 [math]22 Apr 2021. 及其参考文献。

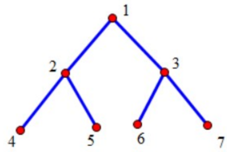
（d）未解决问题

5、略

6、未解决问题

7 第七章 群作用下的计数

1、（a）对 Γ 自上到下标记 1 到 7. 如下：



由于 G 是 Γ 的自同构群，故 $e=(1)(2)(3)(4)(5)(6)(7)\in G$，且 $(45)\in G,(67)\in G,(45)(67)\in G,(23)(46)(57)\in G,(23)(47)(56)\in G$ 令：

$$\pi_1=(1)(2)(34)(5)(6)(7),\quad \pi_2=(1)(2)(3)(4)(5)(67),$$
$$\pi_3=(1)(2)(3)(45)(67),\quad \pi_4=(1)(23)(45)(67),$$
$$\pi_5=(1)(23)(47)(56).$$

由 G 为群，有：

$$\pi_6=\pi_2\pi_4=(1)(23)(4657)\in G,$$
$$\pi_7=\pi_1\pi_4=(1)(23)(4756)\in G.$$

可检验 π_6,π_7 确为 Γ 的自同构。故：

$$G\{e,\pi_1,\pi_2,\pi_3,\pi_4,\pi_5,\pi_6,\pi_7\},\quad \#G=8.$$

因此:

$$Z_G=\frac{1}{8}(z_1^7+2z_1^5z_2+z_1^3z_2^2+2z_1z_2^3+2z_1z_2z_4).$$

（b）由定理 7.5 对 Γ 的不等价 $n-$ 着色数 $N_G(n)$ 为：

$$N_G(n)=\frac{1}{\#G}\sum_{\pi\in G}n^{c(\pi)}=\frac{1}{8}(n^7+2n^6+n^5+2n^4+2n^3).$$

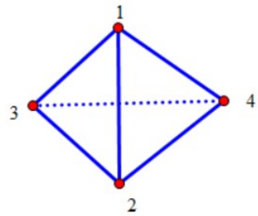
或者由 Polya 定理：

$$F_G(r_1,r_2,...,r_n)=Z_G(r_1+r_2+...+r_n,r_1^2+r_2^2+...+r_n^2,...,r_1^j+r_2^j+...+r_n^j,...).$$

令 $r_1=r_2=...=r_n=1$，则：

$$N_G(n)=F_G(1,1,...,1)=\frac{1}{8}(n^7+2n^6+n^5+2n^4+2n^3).$$

2、记正四面体的四个角分别为：$1,2,3,4$。



由于正四面体的四个三角形均为正三角形，对点 1 而言：

$$|G_1| = \#\{e, (1)(234), (1)(243)\} = 3,$$

$$|O_1| = \{1, 2, 3, 4\} = 4.$$

因此：$|G| = |G_1| \cdot |O_1| = 12$，在正四面体中，考虑固定顶点时，等价地也在考虑固定面，例如：过点 1，又过四面体的中心，必过底面的中心。因此：固定点（面）时，圈类型 $z_1^1 z_2^1$，共 8 个，分别为：

$$(1)(234), (1)(243), (2)(134), (2)(143), (3)(142), (3)(124), (4)(123), (4)(132).$$

固定棱时，圈类型为 z_2^2，共 3 个，分别为：

$$(12)(34), (13)(24), (14)(23).$$

单位元为：$(1)(2)(3)(4) = e$，圈类型为 z_1^4，共 1 个.

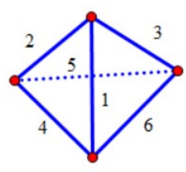
（a）

$$Z_G = \frac{1}{12}(z_1^4 + 3z_2^2 + 8z_1 z_3).$$

（b）不等价 $n-$ 着色数：

$$N_G(n) = \frac{1}{12}(n^4 + 11n^2).$$

（c）现在对正四面体的边分别标记为：$1, 2, 3, 4, 5, 6$ 则：



固定点时，圈类型为 z_3^2，共 8 个，分别为：

$$(123)(456), (132)(465), (124)(356), (142)(365),$$

$$(146)(325), (164)(352), (136)(254), (163)(245).$$

固定棱时，圈类型为 $z_1^2z_2^2$，共 3 个，分别为：

$$(2)(6)(34)(15), (3)(4)(15)(26), (1)(5)(34)(26).$$

单位元为 $e=(1)(2)(3)(4)(5)(6)$，圈类型为 z_1^6，共 1 个。
因此轮换指标为：

$$Z_G=\frac{1}{12}(z_1^6+8z_3^2+3z_1^2z_2^2).$$

不等价 $n-$ 着色数:

$$N_G(n)=\frac{1}{12}(n^6+8n^2+3n^4).$$

直接的：$\#G_x|O_x|=2\times 6=12.$

3、由循环对称,即链的旋转,可令 $\pi=(123...2n), G=\{1,\pi,\pi^2,...,\pi^{2n-1}\}$ 由定理 7.10：

$$\begin{aligned}F_G(r,b)&=\frac{1}{2n}\sum_{d|2n}\varphi(d)(r^d+b^d)^{\frac{2n}{d}}\\&=\sum_{i_1,i_2}\kappa(r_1,r_2)r^{i_1}b^{i_2}\\&=\frac{1}{2n}\sum_{d|2n}\varphi(d)\sum_{i=0}^{\frac{2n}{d}}\binom{\frac{2n}{d}}{i}(r^d)^i(b^d)^{\frac{2n}{d}-i}.\end{aligned}$$

我们要求 r^nb^n 前的系数 $\kappa(n,n)$，即当 $i=\frac{n}{d}$ 时，

$$r^{d\cdot\frac{n}{d}}\cdot b^{\frac{2n}{d}-\frac{n}{d}}\cdot d=r^nb^n$$

前的系数。因此，需要 $d|n$，即 i 为整数，故

$$\kappa(n,n)=\frac{1}{2n}\sum_{d|n}\varphi(d)\binom{\frac{2n}{d}}{\frac{n}{d}},$$

即：

$$\kappa(n,n)=\frac{1}{2n}\sum_{d|n}\varphi(d)\binom{\frac{2n}{d}}{\frac{n}{d}}.$$

4、由莫比乌斯函数为：

$$\mu(n)=\begin{cases}0 & n=1\\(-1)^k & n=p_1p_2...p_k\ (p_i\neq p_j)\\0 & otherwise.\end{cases}$$

其中 p_i 是素数。由题意有：

$$\sum_{d|l} dM_d(n) = n^l.$$

由莫比乌斯反演公式：

$$f(l) = \sum_{d|l} g(d) \Longleftrightarrow g(l) = \sum_{d|l} \mu(d) f\left(\frac{l}{d}\right).$$

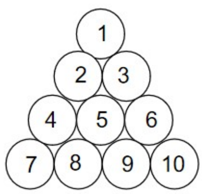
故可得：

$$l \cdot M_l(n) = \sum_{d|l} \mu(d) n^{\frac{l}{d}},$$

$$l \cdot M_l(n) = \sum_{d|l} \mu\left(\frac{l}{d}\right) n^d,$$

$$M_l(n) = \frac{1}{l} \sum_{d|l} \mu\left(\frac{l}{d}\right) n^d.$$

5、（a）自上到下依次标记这十只球为 $1,2,3,4,5,6,7,8,9,10$ 如下：



由于三角队列在二维平面可以自由旋转，因此

$$G = \{e, (1710)(286)(349)(5), (1107)(268)(394)(5)\}.$$

故轮换指标为：

$$Z_G = \frac{1}{3}(z_1^{10} + 2z_1 z_3^3).$$

因此，使用十种颜色的不等价着色数的生成函数为：

$$\begin{aligned} F_G(r_1, r_2, ..., r_{10}) &= \sum_{i_1, i_2, ..., i_{10}} \kappa(i_1, i_2, ..., i_{10}) r_1^{i_1} r_2^{i_2} ... r_{10}^{i_{10}} \\ &= Z_G(r_1 + r_2 + ... + r_{10}, r_1^2 + r_2^2 + ... + r_{10}^2, ...) \\ &= \frac{1}{3}\left(\left(\sum_{i=1}^{10} r_i\right)^{10} + 2\left(\sum_{i=1}^{10} r_i\right)\left(\sum_{i=1}^{10} r_i^3\right)^3\right). \end{aligned}$$

（b）由（a）得：

$$F_G(r_1, r_2, ..., r_{10}) = \frac{1}{3}\left(\left(\sum_{i=1}^{10} r_i\right)^{10} + 2\left(\sum_{i=1}^{10} r_i\right)\left(\sum_{i=1}^{10} r_i^3\right)^3\right).$$

在由多项式定理

$$(x_1 + x_2 + ... + x_t)^n = \sum \binom{n}{n_1, ..., n_t} x_1^{n_1} x_2^{n_2} ... x_t^{n_t}$$

求 4 个红球，3 个绿球，3 个淡黄色球的不等价着色数，即求 $r_1^4 r_2^3 r_3^3$ 前的系数 $\kappa(4, 3, 3, 0, ..., 0)$ 故：

$$\begin{aligned}
\kappa(4, 3, 3, 0, ..., 0) &= \frac{1}{3}\left(\binom{10}{4, 3, 3} + 2\binom{3}{1, 1, 1}\right) \\
&= \frac{1}{3}\left(\frac{10!}{4!3!3!} + 2 \cdot 3!\right) \\
&= 1404.
\end{aligned}$$

求 4 个红色球，4 个青色球，2 个浅蓝色球的不等价着色数，即求 $r_1^4 r_2^4 r_3^2$ 前的系数 $\kappa(4, 4, 2, 0, ..., 0)$ 因为 $F_G(r_1, r_2, ..., r_{10})$，不必在意 r_1, r_2, r_3 的下标，故有：

$$\kappa(4, 4, 2, 0, ..., 0) = \frac{1}{3}\left(\binom{10}{4, 4, 2} + 0\right) = 1050.$$

6、（陶思豪提供）在 D_4 的作用下，考虑用 r, b, y 为 X 着色。我们来计算 $N_{D_4}(3)$. 用 r 着色的元素为：$X \setminus (S \cup T)$. 用 b 着色的元素为：集合 S. 用 y 着色的元素为：$T \setminus S$. 则我们有：

$$Z_{D_4} = \frac{1}{8}(2z_2^{32} + 2z_1^8 z_2^{28} + 2z_4^{16} + z_2^{32} + z^{64}).$$

于是，令 $z_i = 3$，得到：

$$N_{D_4}(3) = \frac{1}{8}(3 \cdot 3^{32} + 2 \cdot 3^{36} + 2 \cdot 3^{16} + 3^{64}).$$

7、由 $f(n)$ 是 X 上的不等价 $n-$ 着色数。故

$$f(n) = \frac{1}{\#G} \cdot \sum_{\pi \in G} n^{c(\pi)},$$

其中 $c(\pi)$ 是 π 中轮换的个数。因此：

$$f(n) = \frac{1}{\#G}(c_1 n + c_2 n^2 + ... + c_i n^i + ... + c_l n^l).$$

其中 c_i 表示 G 中有 i 个轮换的置换的个数。由 $\#X=l$，故 $c_l=1$ 对应的置换为 $(1)(2)...(l)$，故有：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(n)}{n^l}=\lim_{n\to\infty}\frac{c_1n+c_2n^2+...+c_{l-1}n^{l-1}+n^l}{\#G\cdot n^l}=\frac{1}{\#G}.$$

8、由于：

$$\begin{aligned}f(n)&=\frac{1}{\#G}\cdot\sum_{\pi\in G}n^{c(\pi)}\\&=\frac{1}{\#G}(c_1n+c_2n^2+...+c_{l-1}n^{l-1}+n^l)\\&=\frac{1}{443520}(n^{11}+540n^9+...+10n),\end{aligned}$$

其中 c_i 表示 G 中有 i 个轮换的置换的个数。由于多项式相同等价于其系数相等。故：

（a）G 的阶数为 $\#=443520$。

（b）由于任何群 G 中都有单位元 $e=(1)(2)...(l)$ 圈类型为 z_1^l，故 $l=11$ 即 $\#X=11$。

（c）设 π 为 G 中的对换，则 π 的轮换指标为 $z_\pi=z_1^9z_2$，对换的个数为 $f(n)$ 中对应的 n^{10} 前的系数为 0. 因此 G 中无对换。

（d）由 Burnside 引理，作用在 X 上的 G 的轨道数为：

$$|X/G|=\frac{1}{\#G}\sum_{\pi\in G}\#Fix(\pi),$$

$$Fix(\pi)=\{y\in x,\pi(y)=y\}.$$

$\#Fix(\pi)$ 为 π 中长度为 1 的轮换的数目。

由于 $f(n)$ 中存在 $10n$ 这一项，而由 (b) 可知 X 中有 11 个元素。G 中存在 11-轮换。取 $\pi\in G$ 是一个 11-轮换。故对任意的 $x\in X$，都有

$$\{\pi^k(x)|k=1,2,...,11\}=X.$$

故只有一条轨道。

（e）只需找到 G 的非平凡正规子群即可。由于 $f(n)$ 中存在 $10n$ 这一项，而由 (b) 可知 X 中有 11 个元素。G 中存在 11-轮换。取 $\pi\in G$ 是一个 11-轮换。因此：$\langle\pi\rangle$ 是一个正规子群。因为对任意的 $\sigma\in G$，我们有：

$$\sigma(i_1i_2\cdots i_{11})\sigma^{-1}=(\sigma(i_1)\sigma(i_2)\cdots\sigma(i_{11}))\in\langle\pi\rangle.$$

以下做法不对：G 不一定是交换群。

由 $f(n)$ 的 n^9 前的系数为 540. 而 n^9 来自于圈类型 $1^7 2^2$ 或 $1^8 3^1$，令:

$$\pi=(a_1)(a_2)...(a_7)(a_8a_9)(a_{10}a_{11}),\sigma=(a_1)(a_2)...(a_8)(a_9a_{10}a_{11}),$$

其中 $a_i\in\{1,2,...,11\}$，$a_i\neq a_j,(i\neq j)$. 若在 540 个中有 π 型的，令子群 $H=<\pi>=\{e,\pi\}$. 若有 σ 型的，令子群 $H=<\sigma>=\{e,\sigma,\sigma^2\}$，$H$ 为 G 的非平凡子群，故 G 不是一个单群。

9、略

10、略

11、略

12、（a）由 $e_6(n)=\#\{\pi|\pi^6=l\}$，由于 6 的因子有 $1,2,3,6$，在由：

$$Z_G=\frac{1}{\#G}\sum_{\pi\in G}z_\pi,$$

$$z_\pi=z_1^{c_1}z_2^{c_2}...z_n^{c_n},\quad \sum_i ic_i=n.$$

故 $e_6(n)=n!Z_G(z_1=z_2=z_3=z_6=1,z_4=z_5=0)$ 由定理 7.13，有 Z_G 的生成函数如下：

$$\sum_{l\geqslant 0}Z_G(z_1,z_2,...)x^l=\exp\left(z_1x+z_2\frac{x^2}{2}+z_3\frac{x^3}{3}+...\right).$$

得：

$$\begin{aligned}\sum_{n\geqslant 0}e_6(n)\frac{x^n}{n!}&=\exp\left(z_1x+z_2\frac{x^2}{2}+z_3\frac{x^3}{3}+z_6\frac{x^6}{6}\right)|_{z_1=z_2=z_3=z_6=1}\\&=\exp\left(x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^6}{6}\right).\end{aligned}$$

（b）对任意 $k\geqslant 1$ 由 $e_k(n)=\#\{\pi\in G_n|\pi^k=l\}$ 同理可得：

$$\sum_{n\geqslant 0}e_k(n)\frac{x^n}{n!}=\exp\left(\sum_{m|k}\frac{x^m}{m}\right).$$

13、（a）由 $f(n)$ 为对称群 G_n 中所有轮换长度为偶数的置换数目。故

$$f(n)=n!Z_{G_n}(i\ \ is\ \ even,\ z_i=1;\ \ i\ \ is\ \ odd,\ z_i=0),$$

其中：

$$Z_G=\frac{1}{|G|}\sum_{\pi\in G}z_\pi$$

$$z_\pi=z_1^{c_1}z_2^{c_2}...z_n^{c_n},\quad \sum_i ic_i=n.$$

由于 Z_{G_n} 的生成函数为：（定理 7.13）

$$\sum_{l\geqslant 0} Z_{G_n}(z_1,z_2,...)x^l=\exp\left(z_1x+z_2\frac{x^2}{2}+z_3\frac{x^3}{3}+...\right).$$

因此得：

$$\sum_{n\geqslant 0}\frac{f(n)}{n!}x^n=\exp\left(\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{6}x^6+...\right).$$

由

$$\ln(1+x)=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4+...,$$
$$-\ln(1-x)=x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{4}x^4+....$$

得：

$$-\frac{1}{2}(\ln(1+x)+\ln(1-x))=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{6}x^6+....$$

故

$$\sum_{n\geqslant 0}\frac{f(n)}{n!}x^n=\exp\left(-\frac{1}{2}\ln(1-x^2)\right)=(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}.$$

（b）由（a）得：

$$\sum_{n\geqslant 0}\frac{f(n)}{n!}x^n=(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}=\sum_{n\geqslant 0}\binom{-\frac{1}{2}}{n}(-x^2)^n=\sum_{n\geqslant 0}(-1)^n\binom{-\frac{1}{2}}{n}x^{2n}.$$

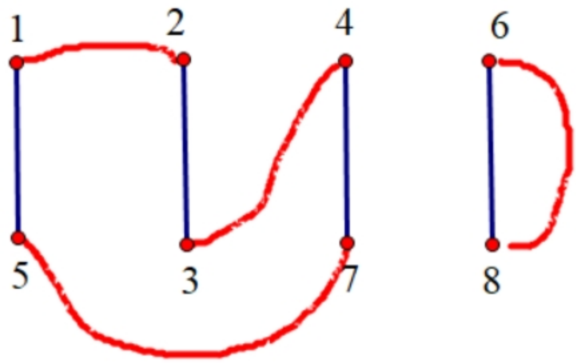
由上式可知当 n 为奇数时，x^n 前的系数为 0，此时 $f(n)=0$，当 n 为偶数时，则有：

$$\begin{aligned}\sum_{n\geqslant 0}\frac{f(n)}{n!}x^n&=\sum_{m\geqslant 0}(-1)^m\binom{-\frac{1}{2}}{n}x^{2m}\\&=\sum_{m\geqslant 0}\frac{(-1)^m(-1)^m\cdot 1\cdot 3...(2m-1)}{m!\cdot 2^m}x^{2m}\\&=\sum_{m\geqslant 0}\frac{1^2\cdot 3^2...(2m-1)^2}{(2m)!}x^{2m}.\end{aligned}$$

令 $n=2m$，则 $f(n)=1^2\cdot 3^2\cdot ...\cdot(2m-1)^2=1^2\cdot 3^2\cdot ...\cdot(n-1)^2$ 故：

$$f(n)=\begin{cases}0 & n\ \ is\ \ odd;\\ 1^2\cdot 3^2\cdot ...\cdot(n-1)^2 & n\ \ is\ \ even.\end{cases}$$

（c）组合证明：见下图：



如果上式中没有平方，考虑完美匹配（蓝色线段），1 与 5 构成一个圈，2 与 3 构成一个圈，等等。与 1 配对的有 $2n-1$ 个，与 2 配对的有 $2n-3$ 个，等等。

如果有平方，再次匹配（蓝色线段 + 红色线段），我们便得到 (157432)(68). 这一操作可以返回，双射匹配。

14、略

15、由集合 X 关于 G 的不等价 $m-$ 着色数为

$$N_G(m) = \frac{1}{\#G}\sum_{\pi\in G} m^{c(\pi)}, \#G = n!.$$

因此得：

$$N'_G(m) = \frac{1}{n!}\sum_{\pi\in G} c(\pi)m^{c(\pi)-1},$$

$$N''_G(m) = \frac{1}{n!}\sum_{\pi\in G} c(\pi)(c(\pi)-1)m^{c(\pi)-2}.$$

当 $m=1$ 时，

$$N''_G(1) = \frac{1}{n!}\sum_{\pi\in G} c(\pi)(c(\pi)-1) = f(n).$$

由 Polya 定理：

$$F_G(r_1, r_2, ...) = Z_G(r_1 + r_2 + ..., r_1^2 + r_2^2 + ..., ..., r_1^j + r_2^j + ...),$$

$$N_G(m) = F_G(1, 1, 1, ...) = Z_G(m, m, m, ...).$$

由定理 7.13 有：

$$\begin{aligned}\sum_{n\geqslant 0} N_G(m)t^n &= \sum_{n\geqslant 0} Z_G(m,m,m...)t^n \\ &= \exp\left(mt + m\frac{t^2}{2} + m\frac{t^3}{3} + ...\right) \\ &= \exp\left(m(t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + ...)\right).\end{aligned}$$

两边关于 m 求导得：

$$\sum_{n\geqslant 0} N'_G(m)t^n = \exp\left(m\left(t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + ...\right)\right)\cdot\left(t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + ...\right),$$

$$\sum_{n\geqslant 0} N''_G(m)t^n = \exp\left(m\left(t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + ...\right)\right)\cdot\left(t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + ...\right)^2.$$

再由：

$$\sum_{n\geqslant 0} f(n)t^n = \sum_{n\geqslant 0} N''_G(1)t^n = \exp\left(t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + ...\right)\cdot\left(t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + ...\right)^2.$$

由 75 页中间有：

$$\exp\left(t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + ...\right) = \frac{1}{1-t}$$

故由

$$\int(1 + t + t^2 + ...)dt = \int\frac{1}{1-t}dt$$
$$t + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{3}t^3 + ... = -\ln(1-t)$$

可得：

$$\sum_{n\geqslant 0} f(n)t^n = \frac{1}{1-t}\cdot(-\ln(1-t))^2 = \frac{(\ln(1-t))^2}{1-t}.$$

16、（a）（未证完）由已知商偏序集 B_n/G 是秩对称的，秩单峰的 n 次偏序集

当 n 为奇数时，由 $p_i = P_{n-i}, (i = 0, 1, 2, ..., n)$ 当 i 为偶数时，$n-i$ 为奇数，当 i 为奇数时，$n-i$ 为偶数。此时第 i 层水平的元素个数等于第 $n-i$ 层水平的元素个数。此时秩为偶数 $0, 2, 4, ..., \frac{n-1}{2}$，与秩为奇数 $n, n-2, n-4, ..., \frac{n+1}{2}$ 对应的元素个数相等。

当 n 为偶数时，

（陶思豪提供：）对任意的 $\pi\in G$，由 G 是奇数阶子群，所以 π 的每一个轮换的长为奇数。由推论 7.15，得：

$$\sum_i \#(B_n/G)_i q^i = Z_G(1+q, 1+q^2, ...).$$

令 $q=-1$，则 $1+q^i=0$（当 i 为奇数时）。故 B_n/G 中秩为偶数的元素个数减去 B_n/G 中秩为奇数的元素个数 $=0$. 因此相等。

（b）略

17、由 $c(l,k)$ 为 G_l 中具有 k 个轮换的置换的个数。因此，由 P73 页，序列 $c(l,1),c(l,2),...,c(l,l)$ 的生成函数为：

$$\sum_{k=1}^{l} c(l,k)x^k = x(x+1)(x+2)...(x+l-1).$$

令 $c(l,0)=0$，则：

$$\sum_{k=0}^{l} c(l,k)x^k = x(x+1)(x+2)...(x+l-1).$$

显然，由上式右端可知，此式为实系数多项式，且其根都是实数，分别为: $0,-1,-2,...,-l+1$ 由 P43 页定理（Newton）可知,序列 $c(l,0),c(l,1),...c(l,l)$ 是强 log-凹的，故 $c(l,1),c(l,2),...c(l,l)$ 是强 log-凹的。

8 第八章 杨表初探

1、要求形状为 $(4,2)$ 的所有标准杨表，由下图：

5	4	2	1
2	1		

故由钩长公式得：

$$f^{\lambda} = \frac{6!}{5 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1} = 9.$$

有 9 个标准杨表，分别为：

1	2	4	5
3	6		

1	2	3	5
4	6		

1	2	5	6
3	4		

1	2	3	4
5	6		

1	2	4	6
3	5		

1	3	5	6
2	4		

1	3	4	5
2	6		

1	3	4	5
2	6		

1	2	3	6
4	5		

2、由题意要证：形状为 $\lambda = (n,n)$ 的 SYT 数为 Catalan 数 $C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$ 由：

n+1	n	n-1	...	3	2
n	n-1	n-2	...	2	1

再由钩长公式得：

$$f^{\lambda} = \frac{(2n)!}{(n+1)!n!} = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} = C_n.$$

3、由 $L(m,n)$ 是容纳在 $m \times n$ 矩形中的杨图的集合，序为包含关系。而由 $L(m,n)$ 是秩为 mn 的分次偏序集，故 $L(m,n)$ 的每一条极大链，都可以看做从空分拆 $\emptyset$ 出发到 $\lambda = nnn...n$(m 个 n) 的一个游动，且游动的型为 $W = U^{mn}$. 对 $L(4,4)$ 而言，求有多少条极大链，即求 $\alpha(U^{4\cdot 4}, \lambda)$ 的值，$\lambda = 4444$ 由其钩长图为：

7	6	5	4
6	5	4	3
5	4	3	2
4	3	2	1

再由钩长公式得：

$$\alpha(U^{16}, \lambda) = f^{\lambda} = \frac{16!}{7 \cdot 6^2 \cdot 5^3 \cdot 4^4 \cdot 3^3 \cdot 2^2} = 24024.$$

4、（法一）由题意：$c(\lambda)$ 表示分拆 λ 的转角方块数（不同分量）故 $\sum_{\lambda \vdash n} c(\lambda)$ 表示图 $Y_{n-1,n}$ 之间的边的个数。由推论 8.10：$\lambda \vdash n$ 则从 λ 中

删除一个方块，在插入一个方块，最终变回 λ 的操作方法数为：

$$\sum_{s=1}^{n}[p(n-s)-p(n-s-1)]s.$$

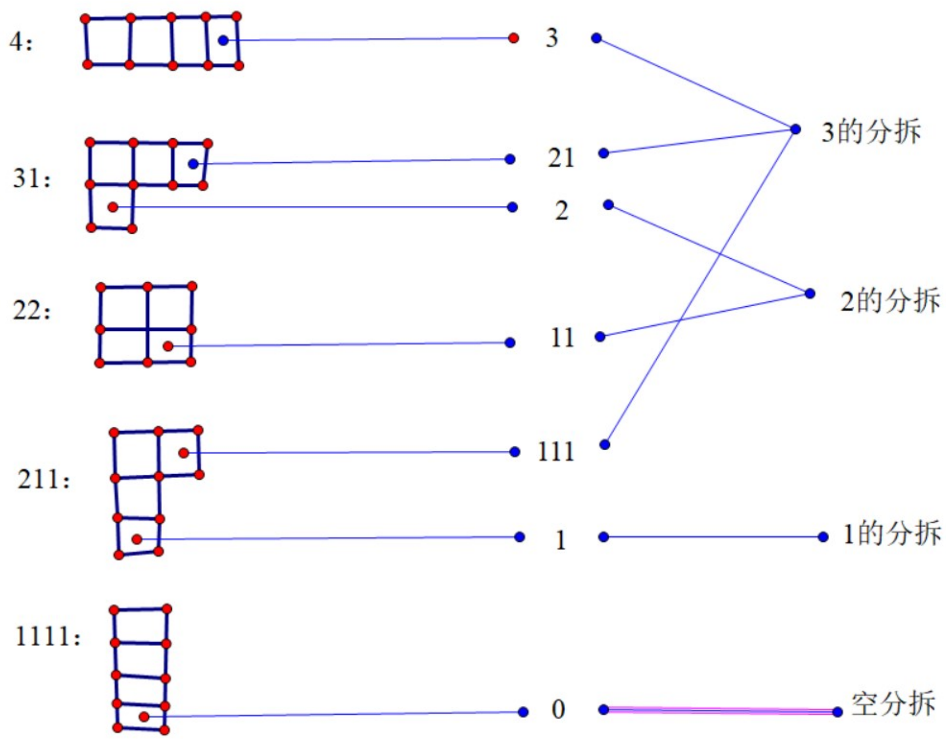
此数正好是图 $Y_{n-1,n}$ 之间的边数。故：

$$\begin{aligned}\sum_{\lambda\vdash n}c(\lambda)=\sum_{s=1}^{n}[p(n-s)-p(n-s-1)]s\\ &=[p(n-1)-p(n-2)]\cdot 1+[p(n-2)-p(n-3)]\cdot 2+...\\ &\quad+[p(2)-p(1)]\cdot(n-2)+[p(1)-p(0)]\cdot(n-1)+[p(0)-p(-1)]\cdot n\\ &=p(n-1)+p(n-2)+...+p(1)+p(0),\end{aligned}$$

其中 $p(-1)=0.$

（法二）组合证明：

观察 4 的分拆的转角方块数与 $3,2,1,\emptyset$ 之间的联系：



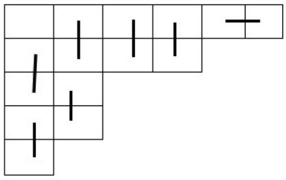
算对应关系时，将图中左边原分拆中的点及点所在的一列删去，得到的分拆为 $3,2,1,\emptyset$ 中的一个，可得：

$$\sum_{\lambda\vdash 4}=p(0)+p(1)+p(2)+p(3).$$

同理，可由 $3,2,1,\emptyset$ 的分拆 λ^1 与 4 比较可还原 4 的分拆 λ（故为双射），同理可推广至 n 的情况，得：

$$\sum_{\lambda\vdash n} c(\lambda)=p(0)+p(1)+...+p(n-1).$$

5、对任意的分拆 λ，画出其杨图，在其杨图中去掉相连的两个方格，使得剩余的方格仍是另一个分拆的杨图，这时去掉了一个奇长，一个偶长，剩下的方格中奇偶个数不变，例如：



用 $-,|$ 表示去掉方格。递归的，每次这样的删去方格，得到一个方格为 1，为三角数，或者为下图中的阶梯图中无法删去方格（删的直到类似如下情况时无法在进行下去）

5	3	1
3	1	
1		

7	5	3	1
5	3	1	
3	1		
1			

此时每个方格中的钩数均为奇数。设每行方格数为 $h,h-1,h-2,...,2,1$ 且每个方格中的数均为奇数。则奇长钩数为：$h+(h-1)+(h-2)+...+2+1=\frac{h(h+1)}{2}$，偶长钩数为：0. 故其差为一个三角数。

6、见下面这本书的第七章习题 7.16. R. P. Stanley, Enumerative Combinatorics (volume 2), Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 62, Cambridge University Press, 1999.

7、略

8、略

9、略

10、由题意：添加方块与删除方块的过程，可以看做一个游动，始于空分拆 $\emptyset$，终于空分拆 $\emptyset$。其型为 $w=D^{2n}U^nD^nU^{2n},\lambda=\emptyset$ 故由定理 8.4

可得：

$$\begin{aligned}\alpha(w,\lambda)&=f^{\lambda}\prod_{i\in S_w}(b_i-a_i)\\&=1\cdot\prod_{i\in S_w}(b_i-a_i)\\&=2n(2n-1)...[2n-(n-1)]\\&\quad\cdot(3n-n)(3n-n-1)...[3n-n-(2n-1)]\\&=\frac{(2n)!}{n!}\cdot(2n)!=\frac{((2n)!)^2}{n!}.\end{aligned}$$

（法二）考虑将 w 作用在 1 上面，U 表示乘以 x，D 表示 D_x 得：$D^{2n}U^nD^nU^{2n}\cdot 1$，会成为：

$$\begin{aligned}1&\to x^{2n}\to 2n(2n-1)...(n+1)x^n\\&\to 2n(2n-1)...(n+1)x^{2n}\to 2n(2n-1)...(n+1)[(2n)!].\end{aligned}$$

最后得：

$$2n(2n-1)...(n+1)[(2n)!]=\frac{((2n)!)^2}{n}.$$

11、见下面这本书的第七章习题 7.15. R. P. Stanley, Enumerative Combinatorics (volume 2), Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 62, Cambridge University Press, 1999.

12、由 $DU=UD+I$，$DU^i=U^iD+iU^{i-1}$ 得：

$$\begin{aligned}D^2U^2&=D(DU^2)=D(U^2D+2U)=DU^2D+2DU\\&=(U^2D+2U)D+2(UD+I)\\&=U^2D^2+4UD+2I,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}D^3U^3&=D^2(DU^3)=D^2(U^3D+3U^2)\\&=D(DU^3D+3DU^2)\\&=D((U^3D+3U^2)D+3(U^2D+2U))\\&=D(U^3D^2+6U^2D+6U)\\&=(U^3D+3U^2)D^2+6(U^2D+2U)D+6(UD+I)\\&=U^3D^3+9U^2D^2+18UD+6I.\end{aligned}$$

注：12 题或 14 题，我们换个思路来看待：令 $D=\frac{d}{dx}=D_x$ 是一个求导算子，令 $U=x$ 是一个乘 x 的算子。则 $DU=UD+I$ 等价于

$D_x \cdot x = xD_x + 1$。我们如下让其作用在一个简单的多项式 x^n 上。因此：

$$D^3U^3 \cdot x^n = D_x^3 x^3 \cdot x^n = D_x^3 \cdot x^{n+3} = (n+3)(n+2)(n+1) \cdot x^n.$$

现在令

$$D^3U^3 = c_1U^3D^3 + c_2U^2D^2 + c_3UD + c_4.$$

我们考虑

$$(c_1U^3D^3+c_2U^2D^2+c_3UD+c_4)\cdot x^n = (c_1n(n-1)(n-2)+c_2n(n-1)+c_3n+c_4)\cdot x^n.$$

代入 $n=0$，可得 $c_4=6$。代入 $n=1$，可得 $c_3=18$。依次类推可得 $c_2=9$，$c_1=1$.

13、略。是否只需验证 $DU-UD=I$ 即可？

14、由数学归纳法，对 $n=1$ 来说，$UD=DU$ 显然成立。对 $n=2$ 有：

$$U^2D^2 = (UD-I)UD = UDUD - UD = U(UD+I)D - UD = U^2D^2.$$

假设对 $n-1$ 而言，等式成立，即有：

$$U^{n-1}D^{n-1} = (UD-(n-2)I)...(UD-I)UD.$$

则对 n 而言，有：

$$\begin{aligned}
U^nD^n &= U(U^{n-1})DD^{n-1} = U(U^{n-1}D)D^{n-1} \\
&= U(DU^{n-1} - (n-1)U^{n-2})D^{n-1} \\
&= UDU^{n-1}D^{n-1} - (n-1)U^{n-1}D^{n-1} \\
&= (UD-(n-1)I)U^{n-1}D^{n-1} \\
&= (UD-(n-1)I)(UD-(n-2)I)...(UD-I)UD.
\end{aligned}$$

证毕。

15、略

16、略

17、(a) 令 $S=\{1,2,...,n\}=S_1\cup S_2\cup...\cup S_t$. 设 $n\in S_1$, $\#S_1=k+1$ 对某个 k, $0\le k\le n-1$. 故 $S_2,...,S_t$ 是 $[n-1-k]$ 的集合划分。于是我们有

$$B(n) = \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}B(n-1-k) = \sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}B(n-k).$$

现在对 $F(x)$ 求导，得：

$$\begin{aligned}
F'(x) &= \sum_{n\geq 1} B(n)\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\\
&= \sum_{n\geq 1}\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}B(n-1-k)\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\\
&= \sum_{n\geq 1}\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}B(n-k)\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\\
&= \sum_{n\geq 1}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k-1)!(n-k)!}B(n-k)x^{n-1}\\
&= \sum_{n\geq 1}\sum_{k=1}^{n}\frac{x^{k-1}}{(k-1)!}B(n-k)\frac{x^{n-k}}{(n-k)!}\\
&= \sum_{j=0}^{\infty}(\sum_{i=0}^{\infty}\frac{x^j}{j!}B(i)\frac{x^i}{i!})\\
&= \sum_{j=0}^{\infty}\frac{x^j}{j!}\sum_{i=0}^{\infty}B(i)\frac{x^i}{i!}\\
&= e^x F(x).
\end{aligned}$$

于是，我们有：

$$\frac{dF(x)}{dx} = e^x F(x),$$

即：

$$\frac{dF(x)}{F(x)} = e^x dx.$$

两边同时积分 (加上初始条件) 得到：

$$F(x) = e^{e^x-1}.$$

(b) 略

18、略

19、(a) 设 r 是分拆 λ 中不同分量的个数，则 $U(\lambda)$ 是一个 $r+1$ 项的和式，而 $D(\lambda)$ 是一个 r 项的和式，对任意的 λ，DX 中的元素分拆 λ 前的系数为 $r+1$，$(U+I)X$ 中 λ 前的系数为 $r+1$，因此 $DX=(U+I)X$。

(b) $s_0=1, s_1=1, s_2=2, s_3=4, s_4=10$

$$s_n = \sum_{\lambda\vdash n} f^{\lambda}.$$

（c）由数学归纳法 $n=0$ 时，有 $DX=(U+I)X$ 显然成立。假设 n 时，等式成立，即有:

$$D^nX=(UD^{n-1}+D^{n-1}+(n-1)D^{n-2})X.$$

则对 $n+1$ 有：

$$\begin{aligned}D^{n+1}X&=D(UD^{n-1}+D^{n-1}+(n-1)D^{n-2})X\\&=DUD^{n-1}X+D^nX+(n-1)D^{n-1}X\\&=UD^nX+D^{n-1}X+D^nX+(n-1)D^{n-1}X\\&=UD^nX+D^nX+nD^{n-1}X.\end{aligned}$$

得证。

（d）观察（c）可得 $s_{n+1}=s_n+ns_{n-1}$ 故有：

$$s_n=s_{n-1}+(n-1)s_{n-2},n\geqslant 2.$$

初始条件为 $s_0=1,s_1=1$.

（e）由（d），我们有如下式子：

$$F(x)=1+x+\sum_{n\geq 2}s_n\frac{x^n}{n!}=1+x+\sum_{n\geq 2}(s_{n-1}+(n-1)s_{n-2})\frac{x^n}{n!}.$$

对上式两边求导得到：

$$\begin{aligned}F'(x)&=1+\sum_{n\geq 2}s_{n-1}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}+x\sum_{n\geq 2}s_{n-2}\frac{x^{n-2}}{(n-1)!}\\&=(1+x)F(x).\end{aligned}$$

于是：

$$\frac{dF(x)}{dx}=(1+x)F(x),$$

即：

$$\frac{dF(x)}{F(x)}=(1+x)dx.$$

积分得到：

$$\ln F(x)=x+\frac{x^2}{2}+c.$$

结合初始条件：$F(0)=s_0=1$，我们知道 $c=0$. 从而：

$$F(x)=e^{x+\frac{x^2}{2}}.$$

（f）首先计算 s_n, 由于

$$F(x)=e^{x+\frac{x^2}{2}}=\sum_{m\geq 0}\frac{(x+\frac{x^2}{2})^m}{m!},$$

x^n 前的系数为 $\frac{s_n}{n!}$. 我们主要考虑 x^n 前面的系数。令 $m=n-k$, $k=0,1,...,\lfloor\frac{n}{2}\rfloor$. 则：$x^n$ 的系数为 $n-2k$ 个 x, 和 k 个 $\frac{x^2}{2}$. 于是：

$$\begin{aligned}\frac{s_n}{n!}&=\sum_{k=0}^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}\binom{n-k}{k}\frac{1}{2^k(n-k)!}\\&=\sum_{k=0}^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}\frac{(n-k)!}{k!(n-2k)!}\frac{1}{2^k(n-k)!}\\&=\sum_{k=0}^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}\frac{1}{2^kk!(n-2k)!}.\end{aligned}$$

于是：

$$s_n=\sum_{k=0}^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}\frac{n!}{2^kk!(n-2k)!}.$$

现在考虑 S_n 中对合的个数。写成不相交的轮换的乘积，也即在圈分解中，圈长为 1 或 2. 假设有 k 个 2 圈，$0\leq k\leq\lfloor\frac{n}{2}\rfloor$. 则有 $\binom{n}{2k}$ 种方法来挑选 $2k$ 个元素。把这 $2k$ 个元素放到 k 个不相交的 2 圈中，共

$$1\cdot 3\cdot ...\cdot(2k-1)=\frac{(2k)!}{k!2^k}$$

种方法。从而我们有

$$\begin{aligned}\#\{\sigma,\sigma^2=id\}&=\sum_{k=0}^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}\binom{n}{2k}\frac{(2k)!}{2^k(k)!}\\&=\sum_{k=0}^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}\frac{n!}{(2k)!(n-2k)!}\frac{(2k)!}{2^k(k)!}\\&=\sum_{k=0}^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}\frac{n!}{2^kk!(n-2k)!}.\end{aligned}$$

得证。

（g）

（h）由 $\pi^2=id$，得到 $\pi=\pi^{-1}$。从而由（g）可知 $P=Q$。故：

$$s_n=\sum_{\lambda\vdash n}f^\lambda=\#\{\pi,\pi^2=id\}.$$

20、略

21、略

22、略

23、略

24、略

25、（a）由偏序集 Z 构造的过程可知 $\#Z_0=1,\#Z_1=1,\#Z_2=2$ 且满足递推关系式：

$$\#Z_n=\#Z_{n-1}+\#Z_{n-2},n\geqslant 2.$$

而此递推关系正好为 Fibonacci 数的递推关系，且初始条件为 $\#Z_0=1,\#Z_1=1$，故 $\#Z_n=F_{n+1}$ 由 Fibonacci 数的生成函数可知，Z 的秩生成函数为

$$F(Z,q)=\frac{1}{1-q-q^2}.$$

注：由 $f_0=0,f_1=1,f_2=1,f_3=2,...$ 可得生成函数为：

$$\begin{aligned}F(x)&=f_0+f_1x+f_2x^2+f_3x^3+...\\&=f_1x+\sum_{i\geqslant 2}f_ix^i\\&=x+\sum_{i\geqslant 2}(f_{i-2}+f_{i-1})x^i\\&=x+x^2+\sum_{i\geqslant 2}f_{i-2}x^{i-2}+x\sum_{i\geqslant 2}f_{i-1}x^{i-1}\\&=x+x^2F(x)+xF(x).\end{aligned}$$

最后得：$F(x)=\frac{x}{1-x-x^2}$ 同理：由 $f_0=1,f_1=1,f_2=2,f_3=3,...$ 可得生成函数为：

$$\begin{aligned}F(x)&=f_0+f_1x+f_2x^2+f_3x^3+...\\&=1+f_1x+\sum_{i\geqslant 2}f_ix^i\\&=1+x+\sum_{i\geqslant 2}(f_{i-2}+f_{i-1})x^i\\&=1+x+x^2F(x)+x(F(x)-1)\\&=1+x^2F(x)+xF(x).\end{aligned}$$

最后得：$F(x)=\frac{1}{1-x-x^2}$。

（b）若对 $x\in Z_i$，对 x 先进行向上一个游动，再向下一个游动得到 y 若 $y\neq x$，则同样地可对 x 向下一个游动，再向上一个游动得到 y，此时

$D_{i+1}U_i - U_{i-1}D_i$ 作用 x 后，y 前的系数为 0

若 $y = x$，则由 Z 的"反射"构造可知，若 x 覆盖的元素个数为 r，则 $U_{i-1}D_i$ 作用 x 后，y 前的系数为 r，而覆盖 x 的元素个数，除了这反射上去的 r 个元素，还有新添的覆盖 x 的一个新元素，即图（图 8.1）中直线画出的，故覆盖 x 的元素有 $r+1$ 个，此时 $D_{i+1}U_i - U_{i-1}D_i$ 作用 x 后，y 前的系数为 $(r+1)-r=1$. 故有 $D_{i+1}U_i - U_{i-1}D_i = I_i$

26、略

27、（a）

（b）

（c）对 $m,n \geqslant 1$ 置换 $w \in G_{mn+1}$ 有 $mn+1$ 个不同的整数。记为 $a_1a_2...a_{mn+1}$，设 m_i 是以 a_i 开始的最长的增子序列的长度。r_i 是以 a_i 开始的最长递减子序列的长度。反证，若 $m_i \leqslant m, r_i \leqslant n$ 构造映射：

$$\varphi : a_i \longrightarrow (m_i, r_i)$$

此映射是从 $\{a_1,a_2,...,a_{mn+1}\}$ 到 $\{1,2,...,m\}\times\{1,2,...,n\}$ 的映射。且此映射为单射，若 $a_i \neq a_j$，则：当 $a_i > a_j$ 时，有 $r_i > r_j$；当 $a_i < a_j$ 时，有 $r_i < r_j$。故有 $(m_i,r_i) \neq (m_j,r_j)$ 但

$$\#\{a_1,a_2,...,a_{mn+1}\} = mn+1 > \#\{1,2,...,m\}\times\{1,2,...,n\} = mn.$$

矛盾。

（d）

28、4 的 13 个平面分拆：

$$P_1 = 4, P_2 = 31, P_3 = 22, P_4 = 211, P_5 = 1111$$

$$P_6 = \begin{matrix} 3 \\ 1 \end{matrix}, P_7 = \begin{matrix} 2 \\ 2 \end{matrix}, P_8 = \begin{matrix} 2\ 1 \\ 1 \end{matrix}, P_9 = \begin{matrix} 1\ 1 \\ 1\ 1 \end{matrix}, P_{10} = \begin{matrix} 1\ 1\ 1 \\ 1 \end{matrix}$$

$$P_{11} = \begin{matrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{matrix}, P_{12} = \begin{matrix} 1\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{matrix}, P_{13} = \begin{matrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{matrix}$$

5 的 24 个平面分拆：

$$P_1 = 5, P_2 = 41, P_3 = 32, P_4 = 311, P_5 = 221, P_6 = 2111, P_7 = 11111$$

$$P_8 = \begin{matrix} 4 \\ 1 \end{matrix}, P_9 = \begin{matrix} 3 \\ 2 \end{matrix}, P_{10} = \begin{matrix} 3\ 1 \\ 1 \end{matrix}, P_{12} = \begin{matrix} 2\ 1 \\ 1 \end{matrix}, P_{13} = \begin{matrix} 2\ 1\ 1 \\ 1 \end{matrix}$$

$$P_{14}=\begin{array}{l}2\ 1\\1\ 1\end{array},P_{15}=\begin{array}{l}1\ 1\ 1\ 1\\1\end{array},P_{16}=\begin{array}{l}1\ 1\ 1\\1\end{array},P_{17}=\begin{array}{l}3\\1\\1\end{array},P_{18}=\begin{array}{l}2\\2\\1\end{array}$$

$$P_{19}=\begin{array}{l}2\ 1\\1\\1\end{array},P_{20}=\begin{array}{l}1\ 1\ 1\\1\\1\end{array},P_{21}=\begin{array}{l}1\ 1\\1\ 1\\1\end{array},P_{22}=\begin{array}{l}2\\1\\1\\1\end{array},P_{23}=\begin{array}{l}1\ 1\\1\\1\\1\end{array}$$

$$P_{24}=\begin{array}{l}1\\1\\1\\1\\1\end{array}$$

29、略

30、略

31、（a）由

$$\pi'(A)=\begin{pmatrix}6&4&4&3&3\\5&3&3&2&\\3&2&1&&\end{pmatrix},$$

可得：

$$\pi'(A)=\begin{pmatrix}5&5&5&3&1&1\\4&4&3&1&1&\\3&2&1&&&\end{pmatrix}.$$

得：

$$P=\begin{array}{l}5\ 5\ 5\ 3\ 1\ 1\\3\ 3\ 2\\1\end{array}\qquad Q=\begin{array}{l}3\ 3\ 3\ 2\ 2\ 1\\2\ 1\ 1\\1\end{array}$$

得：

$$\omega_A=\begin{pmatrix}3&3&3&2&2&2&2&1&1&1\\5&3&1&5&3&2&1&5&3&1\end{pmatrix},$$

$$A=\begin{pmatrix}1&0&1&0&1\\1&1&1&0&1\\1&0&1&0&1\end{pmatrix}_{3\times5}.$$

（b）A 中的非零元可构造出数组 ω_A，从而由 RSK' 算法得到 CSPP 对 (P,Q)。

$$A \overset{RSK'}{\longleftrightarrow} (P,Q) \overset{\pi}{\longleftrightarrow} \pi(P,Q) \longleftrightarrow \pi'(P,Q).$$

32、(a)...

(b) 这一结果可以参考下面的书：David M. Bressoud “Proofs and Confirmations: The story of the alternating sign matrix conjecture” Cambridge university press,1999.

请参考 165 页的引理 4.4 和 138 页的公式 4.17, 二者结合给出了最终的结果。

(c)

33、略

34、请参考书籍：David M. Bressoud “Proofs and Confirmations: The story of the alternating sign matrix conjecture” Cambridge university press,1999.

在第 13 页定理 1.3，将这一生成函数表示为：

$$\sum_{n\geq 0} pp_{rst}(n)x^n = \prod_{i=1}^{r}\prod_{j=1}^{s}\frac{1-x^{i+j+t-1}}{1-x^{i+j-1}}.$$

In the 1970s, Ian Macdonald recognized that the generating function given in Theorem 1.3 can also be expressed as

$$\sum_{n\geq 0} pp_{rst}(n)x^n = \prod_{i=1}^{r}\prod_{j=1}^{s}\frac{1-x^{i+j+t-1}}{1-x^{i+j-1}} = \prod_{i=1}^{r}\prod_{j=1}^{s}\prod_{k=1}^{t}\frac{1-x^{i+j+k-1}}{1-x^{i+j+k-2}}.$$

见 David M. Bressoud 的书第 14 页.

35、略

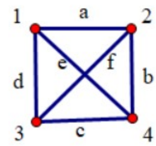
9 第九章 矩阵树定理

1、由完全图 K_p 的生成子树个数 $\kappa(K_p)=p^{p-2}$ 现求 G_p 的生成树个数：

（法一）先给出 K_p 顶点标号为 $1,2,...,p$，再去掉一条边 G_p 则有 $\frac{p(p-1)}{2}$ 种方法去掉一条边。每去掉一条边就会得到一个 G_p，现考虑所有 G_p 的生成子树的总和 S，则：

$$S=\kappa(K_p)\cdot(\frac{p(p-1)}{2}-(p-1))=p^{p-2}\cdot\frac{(p-2)(p-1)}{2}.$$

上式可以理解为：G_p 中的一个生成树，亦为 K_p 中的一个生成树，删去的边并不影响这条生成树。以 K_4 为例：



对生成树 deb 而言，删掉 a,f,c 中的任意一条边，并不影响 def.

现在得到了 G_p 的生成树总和，因为 K_p 是 p 阶完全图，每一条边都是等价的，共 $\frac{p(p-1)}{2}$ 条边，故 G_p 的生成树个数为：

$$\frac{S}{\frac{p(p-1)}{2}}=p^{p-2}\cdot\frac{(p-2)(p-1)}{2}\cdot\frac{2}{p(p-1)}=p^{p-3}(p-2).$$

（上式即为：给无标号的 K_p，去掉一条边（边都等价）后，再给此图标号 $1,2,..,p$ 得到 G_p 的生成树个数）

（法二）利用矩阵树定理计算：对 G_p 而言，不妨设去掉的边为：1——2 则：

$$L(G_p)=\begin{pmatrix} p-2 & 0 & -1 & -1 & ... & -1 & -1 \\ 0 & p-2 & -1 & -1 & ... & -1 & -1 \\ -1 & -1 & p-1 & -1 & ... & -1 & -1 \\ . & . & . & . & ... & . & . \\ . & . & . & . & ... & . & . \\ . & . & . & . & ... & . & . \\ -1 & -1 & -1 & -1 & ... & -1 & -1 \end{pmatrix}_{p\times p}.$$

去掉第一行第一列得到 $L_0(G_p)$：

$$|L_0(G_p)| = \begin{bmatrix} p-2 & 0 & 0 & ... & 0 & -p \\ 0 & p & 0 & ... & 0 & -p \\ 0 & 0 & p & ... & 0 & -p \\ . & . & . & ... & . & . \\ . & . & . & ... & . & . \\ 0 & 0 & 0 & ... & p & -p \\ -1 & -1 & -1 & ... & -1 & p-1 \end{bmatrix}_{(p-1)\times(p-1)}$$

$$= \begin{bmatrix} p-1 & 0 & 0 & ... & 0 & -1 \\ 0 & p & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & ... & 0 & 0 \\ . & . & . & ... & . & . \\ . & . & . & ... & . & . \\ 0 & 0 & 0 & ... & p & 0 \\ -1 & -1 & -1 & ... & -1 & p1 \end{bmatrix}_{(p-1)\times(p-1)}$$

$$= (p-1)p^{p-3} + (-1)^p(-1)\cdot(-1)^{p-1}(-1)p^{p-3}$$
$$= (p-2)p^{p-3}.$$

故：$\kappa(G_p) = (p-2)p^{p-3}$.

（张晨认为:）可以利用本节 12 题的结论。去掉 u,v 边，将 u,v 作为 T_u 和 T_v 的根，则 $T_u \cup T_v$ 构成 $[p]$ 上的恰有两个连通分支且根集为 $\{u,v\}$ 的有根森林。设 $G_p = K_p - \{uv\}$，故：

$$\#\{T : V(T) = [p], uv \in E(T)\} = f_{uv}(P) = 2p^{p-3}.$$

则：

$$\begin{aligned}\kappa(G_p) &= \kappa(K_p) - \#\{T : V(T) = [p], uv \in E(T)\} \\ &= p^{p-2} - 2p^{p-3} = (p-2)p^{p-3}.\end{aligned}$$

2、由 $K_{r,s}$ 是完全二部图，故可得：

$$L=\begin{pmatrix} s & 0 & 0 & ... & 0 & -1 & -1 & ... & -1 \\ 0 & s & 0 & ... & 0 & -1 & -1 & ... & -1 \\ . & . & . & ... & . & . & . & ... & . \\ . & . & . & ... & . & . & . & ... & . \\ 0 & 0 & 0 & ... & s & -1 & -1 & ... & -1 \\ -1 & -1 & -1 & ... & -1 & r & 0 & ... & 0 \\ -1 & -1 & -1 & ... & -1 & 0 & r & ... & 0 \\ . & . & . & ... & . & . & . & ... & . \\ . & . & . & ... & . & . & . & ... & . \\ -1 & -1 & -1 & ... & -1 & 0 & 0 & ... & r \end{pmatrix}_{(r+s)\times(r+s)}.$$

因此：

$$L-rI=\begin{pmatrix} s-r & 0 & 0 & ... & 0 & -1 & -1 & ... & -1 \\ 0 & s-r & 0 & ... & 0 & -1 & -1 & ... & -1 \\ . & . & . & ... & . & . & . & ... & . \\ . & . & . & ... & . & . & . & ... & . \\ 0 & 0 & 0 & ... & s-r & -1 & -1 & ... & -1 \\ -1 & -1 & -1 & ... & -1 & 0 & 0 & ... & 0 \\ -1 & -1 & -1 & ... & -1 & 0 & 0 & ... & 0 \\ . & . & . & ... & . & . & . & ... & . \\ . & . & . & ... & . & . & . & ... & . \\ -1 & -1 & -1 & ... & -1 & 0 & 0 & ... & 0 \end{pmatrix}_{(r+s)\times(r+s)}.$$

对 $L-rI$ 进行线性变换，可以得到：

$$L-rI\to\begin{pmatrix} s-r & 0 & 0 & ... & 0 & -1 & -1 & ... & -1 \\ 0 & s-r & 0 & ... & 0 & -1 & -1 & ... & -1 \\ . & . & . & ... & . & . & . & ... & . \\ . & . & . & ... & . & . & . & ... & . \\ 0 & 0 & 0 & ... & s-r & -1 & -1 & ... & -1 \\ -1 & -1 & -1 & ... & -1 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 & ... & 0 \\ . & . & . & ... & . & . & . & ... & . \\ . & . & . & ... & . & . & . & ... & . \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 & ... & 0 \end{pmatrix}_{(r+s)\times(r+s)}.$$

对 $L-xI$ 取行列式，可以得到：

$$|L-xI|=\begin{bmatrix} x-s & 0 & 0 & ... & 0 & 1 & 1 & ... & 1 \\ 0 & x-s & 0 & ... & 0 & 1 & 1 & ... & 1 \\ . & . & . & ... & . & . & . & ... & . \\ . & . & . & ... & . & . & . & ... & . \\ 0 & 0 & 0 & ... & x-s & 1 & 1 & ... & 1 \\ 1 & 1 & 1 & ... & 1 & x-r & 0 & ... & 0 \\ 1 & 1 & 1 & ... & 1 & 0 & x-r & ... & 0 \\ . & . & . & ... & . & . & . & ... & . \\ . & . & . & ... & . & . & . & ... & . \\ 1 & 1 & 1 & ... & 1 & 0 & 0 & ... & x-r \end{bmatrix}_{(r+s)\times(r+s)}$$

$$=\begin{bmatrix} x-s & 0 & 0 & ... & 0 & 1 & 1 & ... & 1 \\ 0 & x-s & 0 & ... & 0 & 1 & 1 & ... & 1 \\ . & . & . & ... & . & . & . & ... & . \\ . & . & . & ... & . & . & . & ... & . \\ 0 & 0 & 0 & ... & x-s & 1 & 1 & ... & 1 \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 & x-r & 0 & ... & r-x \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & x-r & ... & r-x \\ . & . & . & ... & . & . & . & ... & . \\ . & . & . & ... & . & . & . & ... & r-x \\ 1 & 1 & 1 & ... & 1 & 0 & 0 & ... & x-r \end{bmatrix}_{(r+s)\times(r+s)}$$

$$=\begin{bmatrix} x-s & 0 & 0 & ... & 0 & 1 & 1 & ... & s \\ 0 & x-s & 0 & ... & 0 & 1 & 1 & ... & s \\ . & . & . & ... & . & . & . & ... & . \\ . & . & . & ... & . & . & . & ... & . \\ 0 & 0 & 0 & ... & x-s & 1 & 1 & ... & s \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 & x-r & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & x-r & ... & 0 \\ . & . & . & ... & . & . & . & ... & . \\ . & . & . & ... & . & . & . & ... & . \\ 1 & 1 & 1 & ... & 1 & 0 & 0 & ... & x-r \end{bmatrix}_{(r+s)\times(r+s)}$$

$$
\begin{aligned}
|L-xI| &= (x-r)^{s-1}\begin{bmatrix} x-s & 0 & 0 & \ldots & 0 & s \\ 0 & x-s & 0 & \ldots & 0 & s \\ . & . & . & \cdots & . & . \\ . & . & . & \cdots & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & x-s & s \\ 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 & x-r \end{bmatrix} \\
&= (x-r)^{s-1}\begin{bmatrix} x-s & 0 & 0 & \ldots & 0 & x \\ 0 & x-s & 0 & \ldots & 0 & x \\ . & . & . & \cdots & . & . \\ . & . & . & \cdots & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & x-s & x \\ 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 & x \end{bmatrix} \\
&= x(x-r)^{s-1}\begin{bmatrix} x-s & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ 0 & x-s & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ . & . & . & \cdots & . & . \\ . & . & . & \cdots & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & x-s & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 \end{bmatrix} \\
&= x(x-r)^{s-1}\begin{bmatrix} x-s & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & x-s & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ . & . & . & \cdots & . & . \\ . & . & . & \cdots & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & x-s & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 & (1-\frac{r}{x-s}) \end{bmatrix} \\
&= x(x-r)^{s-1}(x-s)^{r}(1-\frac{r}{x-s}) \\
&= x(x-r)^{s-1}(x-s)^{r-1}(x-s-r).
\end{aligned}
$$

（a）由上面的讨论可得 $rank(L-rI)\leqslant r+1$，L 等于 r 的特征值个数 $\geqslant s-1$.

（b）$s\neq r$，s 与 r 的对称性知 L 等于 s 的特征值个数为 $r-1$.

（c）由 $|L-xI|=x(x-r)^{s-1}(x-s)^{r-1}(x-s-r)$ 可得 L 的特征值为：0（1 重）；r（$s-1$ 重）；s（$r-1$ 重）；$r+s$（1 重）.

注：作者似乎并不希望由 $|L-xI|$ 的等式直接得到 L 的所有特征值，而是由 (a)，(b) 得到 L 中等于 r 的特征值个数 $\geqslant s-1$，等于 s 的特征值个数

$\geqslant r-1$. 由 $tr(L)=2rs$，又 L 的所有行和为 0，故对 $|L-xI|$ 中 x 为 0 时，$|L|=0$，故 L 有 0 特征值，而 L 共有 $r+s$ 个特征值，已有至少 $s-1$ 个 r，$r-1$ 个 s，与 1 个 0. 则另一个特征值为: $2rs-0-r(s-1)-s(r-1)=r+s$.

（d）由定理，已知 L 的全部特征值，故：

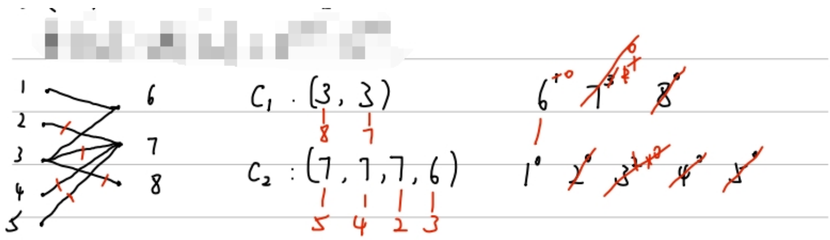
$$\kappa(k_{rs})=\frac{1}{r+s}r^{s-1}s^{r-1}(r+s)=r^{s-1}s^{r-1}.$$

（e）改进 Prufer 方法的组合证明：

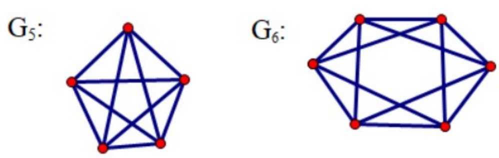
改进 Joyal 方法的组合证明：

令 $V(K_{rs})=V_1\cup V_2$, 其中 $V_1=\{u_1,...,u_r\}$, $V_2=\{v_1,...,v_s\}$. 设 T 是 K_{rs} 的任一生成树，对任意 $e\in E(T)$ 满足 $e=\{u_k,v_r\}$ 删最大的叶子，若最大的叶子属于 V_1, 则在 C_2 中记录其父结点。若最大的叶子属于 V_2, 则在 C_1 中记录其父结点。直到剩下两个顶点，这两个顶点必然一个属于 V_1，另一个属于 V_2. 故 $C_1\in V_1^{s-1}$, $C_2\in V_2^{r-1}$. 于是

$$\#\{C_1\}\cdot\#\{C_2\}=r^{s-1}s^{r-1}.$$



3、由 G_p 的定义可知：



（P16 页 5 题 (h)，有此图的特征值）

G_p 是 4 度正则的。考虑 $A(Z_p)$ 的特征值：

$$\xi_j^2+\xi_j^{-2}+\xi_j+\xi_j^{-1},$$

其中 $\xi_j=e^{\frac{2\pi ij}{p}}$. 首先，我们有如下结果：

$$\prod_{j=0}^{p-1}(x-\xi_j)=x^p-1,\quad \prod_{j=1}^{p-1}(x-\xi_j)=\frac{x^p-1}{x-1}.$$

当 $x=0$ 时，有：

$$\prod_{j=1}^{p-1}(-\xi_j)=(-1)^{p-1}\prod_{j=1}^{p-1}\xi_j=1 \implies \prod_{j=1}^{p-1}\xi_j=(-1)^{p-1}.$$

当 $x=1$ 时，有：

$$\prod_{j=1}^{p-1}(1-\xi_j)=p.$$

于是：

$$\begin{aligned}
\kappa(G)&=\frac{1}{p}\prod_{j=1}^{p-1}(4-(\xi_j^2+\xi_j^{-2}+\xi_j+\xi_j^{-1}))\\
&=\frac{1}{p}\prod_{j=1}^{p-1}(-\xi_j^{-2})(\xi_j^2+3\xi_j+1)(\xi_j-1)^2\\
&=p\cdot(-1)^p\prod_{j=1}^{p-1}(\xi_j^2+3\xi_j+1)\\
&=p\cdot(-1)^p\prod_{j=1}^{p-1}(\xi_j+a^2)(\xi_j+b^2)\\
&=p\cdot(-1)^p\frac{(-a^2)^p-1}{-a^2-1}\cdot\frac{(-b^2)^p-1}{-b^2-1}\\
&=p\cdot(-1)^{p-1}\cdot\frac{1}{5}((-a^2)^p-1)((-b^2)^p-1)\\
&=p\cdot\frac{1}{5}(-1)^{p-1}((-1)^{p+1}a^{2p}+(-1)^{p+1}b^{2p}+2)\\
&=p\cdot\frac{1}{5}(a^{2p}+b^{2p}-2(-1)^p)\\
&=p\cdot\frac{1}{5}(a^p-b^p)^2\\
&=p\cdot F_p^2,
\end{aligned}$$

其中 $a^2b^2=1$, $-(a^2+b^2)=-3$, $ab=-1$, $a+b=1$,

$$F_p=\frac{1}{\sqrt{5}}(a^p-b^p).$$

4、由 C_n 是 n 维立方体,是 n 度正则的,其特征值为 $\binom{n}{i}$ 重的 $n-2i, 0\leqslant i\leqslant n$ 令 K_{2^n} 是 2^n 阶的完全图，是 2^n-1 度正则的，其特征值为: (2^n-1) 重的 -1，与 1 重的 2^n-1，则由题意 $\overline{C_n}=K_{2^n}-C_n$，由 K_{2^n}, C_n 的对称性，可知 $\overline{C_n}$ 是 2^n-n-1 度正则的，且 $\overline{C_n}$ 的邻接矩阵是 K_{2^n} 的邻接矩阵减 C_n 的邻接矩阵，因此 $\overline{C_n}$ 的特征值为：$\binom{n}{i}$ 重的 $-1-(n-2i), 1\leqslant i\leqslant n$

与 1 重的 2^n-n-1，故：

$$\begin{aligned}\kappa(\overline{C_n}) &= \frac{1}{2^n}\prod_{i=1}^{n}(2^n-2i)^{\binom{n}{i}} \\ &= 2^{2^n-n-1}\prod_{i=1}^{n}(2^{n-1}-i)^{\binom{n}{i}}.\end{aligned}$$

注：$\prod_{i=1}^{n} 2^{\binom{n}{i}} = 2^{2^n-1}$.

5、（a）由题意：

$$A=\begin{pmatrix}0 & M\\ M^t & 0\end{pmatrix},\ L=\begin{pmatrix}a & & & & & & & \\ & a & & & & & -M & \\ & & ... & & & & & \\ & & & a & & & & \\ & & & & b & & & \\ & & & & & b & & \\ & -M^t & & & & & ... & \\ & & & & & & & b\end{pmatrix}.$$

则由分块矩阵乘法可得：

$$\begin{aligned}
A^2 &= \begin{pmatrix} 0 & M \\ M^t & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & M \\ M^t & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} MM^t & 0 \\ 0 & M^tM \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & -M \\ -M^t & (b-a)I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (a-b)I & -M \\ -M^t & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a-a & & & & & & & \\ & a-a & & & & & -M & \\ & & ... & & & & & \\ & & & a-a & & & & \\ & & & & b-a & & & \\ & & & & & b-a & & \\ & -M^t & & & & & ... & \\ & & & & & & & b-a \end{pmatrix} \\
&\quad \cdot \begin{pmatrix} a-b & & & & & & & \\ & a-b & & & & & -M & \\ & & ... & & & & & \\ & & & a-b & & & & \\ & & & & b-b & & & \\ & & & & & b-b & & \\ & -M^t & & & & & ... & \\ & & & & & & & b-b \end{pmatrix} \\
&= (L-aI)(L-bI).
\end{aligned}$$

由 L 有特征值 $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_p$ 故存在可逆矩阵 H，使得：

$$HLH^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & ... & 0 \\ . & . & . & ... & . \\ . & . & . & ... & . \\ 0 & 0 & 0 & ... & \lambda_p \end{pmatrix}.$$

故：

$$H(L-aI)H^{-1}=\begin{pmatrix}\lambda_1-a & 0 & 0 & ... & 0\\ 0 & \lambda_2-a & 0 & ... & 0\\ . & . & . & ... & .\\ . & . & . & ... & .\\ 0 & 0 & 0 & ... & \lambda_p-a\end{pmatrix}$$

$$H(L-bI)H^{-1}=\begin{pmatrix}\lambda_1-b & 0 & 0 & ... & 0\\ 0 & \lambda_2-b & 0 & ... & 0\\ . & . & . & ... & .\\ . & . & . & ... & .\\ 0 & 0 & 0 & ... & \lambda_p-b\end{pmatrix}.$$

得：

$$HA^2H^{-1}=H(L-aI)(L-bI)H^{-1}$$

$$=\begin{pmatrix}(\lambda_1-a)(\lambda_1-b) & 0 & 0 & ... & 0\\ 0 & (\lambda_2-a)(\lambda_2-b) & 0 & ... & 0\\ . & . & . & ... & .\\ . & . & . & ... & .\\ 0 & 0 & 0 & ... & (\lambda_p-a)(\lambda_p-b)\end{pmatrix}$$

因此 A^2 的特征值为 $(\lambda_1-a)(\lambda_1-b),(\lambda_2-a)(\lambda_2-b),...,(\lambda_p-a)(\lambda_p-b)$.

（b）不想敲了，佛系一下，见如下图片.

5.(a) $A(G)=\begin{pmatrix}0 & A_1\\ A_1^t & 0\end{pmatrix}$，$L(G)=\begin{pmatrix}aI_a & -A_1\\ -A_1^t & bI_b\end{pmatrix}$，则 $A^2=(L-a1)(L-b1)$.

(b) A：$k-1$ 个 1，$\#A=\binom{n}{k-1}$，$\deg=n-k+1=a$　　$(n-k+1)\binom{n}{k-1}=k\binom{n}{k}$

B：k 个 1，$\#B=\binom{n}{k}$，$\deg=k=b$

$A^2(G_{n,k})$ 的特征值为 0（$\binom{n}{k}-\binom{n}{k-1}$ 重），$i(n-2k+i+1)$（$2\binom{n}{k-i}-2\binom{n}{k-i-1}$ 重）$1\le i\le k$

$A^2(G_{n,k})$ 有特征值 $k(n-k+1)$（2 重）　$\lambda_p=0$，$\lambda_{p-1}=n+1$

$k\le\frac{n}{2}$，$k-1$ 个 1 或 k 个 1 顶点的子图.

$(\lambda-a)(\lambda-b)=i(n-2k+i+1)$，$1\le i<k$. 两根 λ_1,λ_2：

$\lambda_1\lambda_2=(k-i)(n-k+i+1)$，$\lambda_1+\lambda_2=a+b=n+1$.

设 $L(G_{n,k})$ 余下的特征值为 x 个 a 和 y 个 b. 则

$$\begin{cases}x+y=\binom{n}{k}-\binom{n}{k-1}\\ xa+yb=a^2+b^2-(a+b)-(a+b)\sum_{i=1}^{k-1}\left(\binom{n}{k-i}-\binom{n}{k-i-1}\right)=a^2+b^2-(a+b)\binom{n}{k-1}\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x=\frac{1}{b-a}\left(a\binom{n}{k-1}+b\binom{n}{k}-a^2-b^2\right)\\ y=\frac{1}{a-b}\left(a\binom{n}{k}+b\binom{n}{k-1}-a^2-b^2\right)\end{cases}$$

$$K(G_{n,k})=\frac{n+1}{\binom{n}{k}+\binom{n}{k-1}}\cdot\prod_{i=1}^{k-1}\left((k-i)(n-k+i+1)\right)^{\binom{n}{k-i}-\binom{n}{k-i-1}}\cdot a^x\cdot b^y$$

6、（a）引理：两个可交换的 $p\times p$ 矩阵 A 与 B 可以同时对角化，即：存在可逆矩阵 X，使得 XAX^{-1} 和 XBX^{-1} 都是上三角矩阵。

证明：由数学归纳法，当 $n=1$ 时，显然成立。假设当 $n<k$ 时，命题成立，当 $n=k$ 时，取 A 的特征值为 λ，相应的特征子空间为 W，由于 $AB=BA$，对任意 $x\in W$，有 $A(Bx)=B(Ax)=\lambda Bx$，可知 $Bx\in W$，W 是 B 的不变子空间。取 W 的一组基，扩充为全空间的一组基，以他们为列向量的矩阵设为 S. 则：

$$C=S^{-1}AS=\begin{pmatrix}\lambda E & *\\ 0 & G\end{pmatrix},\quad D=S^{-1}BS=\begin{pmatrix}F & *\\ 0 & H\end{pmatrix}.$$

由 A,B 可交换，可得 S,D 可交换，进而 G,H 可交换，而 G,H 的阶数 $<k$，由归纳假设，存在可逆矩阵 T，使得 $K=T^{-1}GT,L=T^{-1}HT$ 为

上三角阵，又由于存在可逆矩阵 R，使得 $J=R^{-1}FR$ 为上三角矩阵。令：

$$Q=\begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & T \end{pmatrix}.$$

Q 可逆，且有：

$$Q^{-1}CQ=\begin{pmatrix} \lambda E & * \\ 0 & K \end{pmatrix}, Q^{-1}DQ=\begin{pmatrix} J & * \\ 0 & L \end{pmatrix}.$$

均为上三角阵，故令 $X=SQ$，则 $X^{-1}AX$ 与 $X^{-1}BX$ 同时为上三角阵。引理得证。

现考虑（a），对全 1 矩阵而言，其特征值为 $0(p-1$ 重$)$，$p(1$ 重$)$，由 $L(G)$ 是实对称矩阵，且列和为 0，故 $L\cdot J=J\cdot L=0$ 因此存在可逆矩阵 X 使得 L 与 αJ 可同时上三角化，对 L 使其所有行加至最后一行，并使得最后一行的前 $p-1$ 列为 0，则：

$$L\rightarrow\begin{pmatrix} & & & & \\ & & * & & \\ & & & & \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 \end{pmatrix}.$$

同样的步骤对 αJ 可得：

$$\alpha J\rightarrow\begin{pmatrix} \alpha & \alpha & \alpha & ... & \alpha \\ . & . & . & ... & . \\ . & . & . & ... & . \\ \alpha & \alpha & \alpha & ... & \alpha \\ \alpha p & \alpha p & \alpha p & ... & \alpha p \end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix} & & & & \\ & & * & & \\ & & & & \\ 0 & 0 & 0 & ... & \alpha p \end{pmatrix}.$$

故存在可逆矩阵 X：

$$X^{-1}LX=\begin{pmatrix} \theta_1 & & & & & \\ 0 & \theta_2 & & & * & \\ . & . & . & & & \\ . & . & . & .. & & \\ 0 & 0 & 0 & ... & \theta_{p-1} & \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 \end{pmatrix}, X^{-1}(\alpha J)X=\begin{pmatrix} 0 & & & & & \\ 0 & 0 & & & * & \\ . & . & . & & & \\ . & . & . & .. & & \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 & \alpha p \end{pmatrix}.$$

$$X^{-1}(L+\alpha J)X = \begin{pmatrix} \theta_1 & & & & & \\ 0 & \theta_2 & & & * & \\ . & . & . & & & \\ . & . & . & .. & & \\ 0 & 0 & 0 & ... & \theta_{p-1} & \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 & \alpha_p \end{pmatrix}.$$

故 $L+\alpha J$ 的特征值为 $\theta_1, \theta_2, ..., \theta_{p-1}, \alpha p$.

（b）由 K_p 是 p 阶完全图，故 K_p 的拉普拉斯矩阵为：

$$L(K_p) = \begin{pmatrix} p-1 & -1 & -1 & ... & -1 \\ -1 & p-1 & -1 & ... & -1 \\ . & . & . & ... & . \\ . & . & . & ... & . \\ -1 & -1 & -1 & ... & p-1 \end{pmatrix}$$
$$= PI - J = PI + \alpha J,$$

其中 I 为单位矩阵，$\alpha = -1$，J 为全 1 矩阵。故：

$$L(G \cup K_p) = L(G) + L(K_p) = L + \alpha J + pI.$$

由（a）知：$L+\alpha J$ 的特征值为：$\theta_1, \theta_2, ..., \theta_{p-1}, \alpha p$。$PI$ 为对角矩阵，且与 $L+\alpha J$ 可交换，其特征值为 p(p 重)，故 $L(G \cup K_p)$ 的特征值为：$\theta_1 + p, \theta_2 + p, ..., \theta_{p-1} + p, 0$. 得：

$$\kappa(G \cup K_p) = \frac{1}{p}(\theta_1 + p)(\theta_2 + p)...(\theta_{p-1} + p) = \frac{1}{p}\prod_{i=1}^{p-1}(\theta_i + p).$$

（c）由题意：$G \cup \overline{G} = K_p$，$K_p$ 是 p 阶完全图。因此

$$L(G) + L(\overline{G}) = L(K_p) = pI - J.$$

故 $L(\overline{G}) = pI - (L(G) + J)$，由 $L(G) + J$ 的特征值为：$\theta_1, \theta_2, ..., \theta_{p-1}, p$，同理由 (a) 可得 $L(\overline{G})$ 的特征值为：$p - \theta_1, p - \theta_2, ..., p - \theta_{p-1}, 0$. 得：

$$\kappa(\overline{G}) = \frac{1}{p}(p - \theta_1)(p - \theta_2)...(p - \theta_{p-1}) = \frac{1}{p}\prod_{i=1}^{p-1}(p - \theta_i).$$

（d）再佛系一下，见图片.

(d) $P(G,x)=\sum_{j=1}^{p} f_j(G)\,x^{j-1}$，其中 $f_j(G)$ 表示G具有j个连通分支的生成有根森林的个数.

由8(a)，$\det(L(G)-xI)=-x(\theta_1-x)\cdots(\theta_{p-1}-x)=\sum_{j=1}^{p}(-1)^j f_j(G)\,x^j$

$\Rightarrow (\theta_1-x)\cdots(\theta_{p-1}-x)=\sum_{j=1}^{p}(-1)^{j-1} f_j(G)\,x^{j-1}=P(G,-x)$

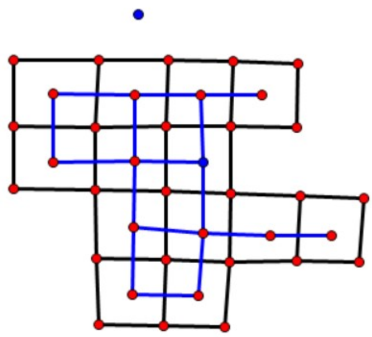
$\Rightarrow P(\bar{G},-x)=(p-\theta_1-x)\cdots(p-\theta_{p-1}-x)$

$=(-1)^{p-1}(\theta_1+x-p)\cdots(\theta_{p-1}+x-p)$

$=(-1)^{p-1}P(G,x-p)$

$\Rightarrow P(\bar{G},x)=(-1)^{p-1}P(G,-x-p)$.

7、由题意：G^* 是 G 的对偶图，G' 是 G^* 中去掉外部顶点所得的图。由图中例 G 与 G'：



则我们可知：

(1)$\#E(G)=\#E(G^*)$

(2)G^* 中除了外部顶点外，其余顶点的度均为 4

(3)G^* 比 G' 多一个顶点（即外部顶点）

(4)$\kappa(G)=\kappa(G^*)$，推论 11.19（待证?）

由题意邻接矩阵 $A(G')$ 有特征值 $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_p$ 故存在可逆矩阵 T，使得：

$$T^{-1}A(G')T=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & & \\ & \lambda_2 & & & \\ & & ... & & \\ & & ... & & \\ & & & & \lambda_p\end{pmatrix}.$$

由:

$$L(G^*) = \begin{pmatrix} 4 & & & & & * \\ & 4 & & M & & * \\ & & 4 & & & * \\ & M^T & & .. & & * \\ & & & & 4 & * \\ * & * & * & & ... & \triangle \end{pmatrix}_{(p+1)\times(p+1)} .$$

令 $L_0(G*)$ 为去掉最后一行，最后一列所得的矩阵。故：

$$L_0(G^*) = \begin{pmatrix} 4 & & & & \\ & 4 & & M & \\ & & 4 & & \\ & M^T & & .. & \\ & & & & 4 \end{pmatrix}_{p\times p} = 4T_{p\times p} - A(G^*).$$

因此：

$$\begin{aligned} |L_0(G^*)| &= |T^{-1}L_0(G^*)T| = |4T^{-1}IT - T^{-1}A(G')T| \\ &= \begin{bmatrix} 4-\lambda_1 & & & \\ & 4-\lambda_2 & & \\ & & ... & \\ & & & 4-\lambda_p \end{bmatrix} \\ &= \prod_{i=1}^{P}(4-\lambda_i). \end{aligned}$$

由矩阵树定理：

$$\kappa(G) = \kappa(G^*) = |L_0(G*)| = \prod_{i=1}^{p}(4-\lambda_i).$$

得证。

8、（a）（未证完）

$det(L-xI) = -x(\mu_1 - x)(\mu_2 - x)...(\mu_{p-1} - x)$，$x^j$ 前的系数的正负号为

$(-1)^j$，显然。

$$|L-xI| = \begin{bmatrix} d_1-x & & & M \\ & d_2-x & & \\ & & ... & \\ & M^t & & d_p-x \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \mu_1-x & & & \\ & \mu_2-x & & \\ & & ... & \\ & & & \mu_p-x \end{bmatrix}.$$

由 $1 \leqslant j \leqslant p$，因此：
当 $j=1$ 时，$f_1(G)=\mu_1\mu_2...\mu_p=p\kappa(G)$，有一个连通分支，$p$ 个顶点都可以作为根。
当 $j=2$ 时，$f_2(G)=\sum_{i=1}^{p-1}\mu_1\mu_2...\widehat{\mu_i}...\mu_p=p\kappa(G)$
....
当 $j=p-1$ 时，$f_{p-1}(G)=\mu_1+\mu_2+...+\mu_{p-1}$
当 $j=p$ 时，$f_p(G)=1$，有 p 个连通分支，每一个顶点都是一个根，只有一种情况。

（b）考虑 $p(x)=\sum_{i=1}^{p}f_i(G)x^i$，此多项式显然为实系数多项式。则：

$$\begin{aligned} p(-x) &= -f_1(G)x+f_2(G)x^2-f_3(G)x^3+...+(-1)^p f_p(G)x^p \\ &= |L-xI| = det|L-xI|. \end{aligned}$$

由 L 是图 G 的 Laplacian 矩阵，为实对称矩阵，故其特征值均为实数。因此 $p(-x)=det|L-xI|=0$ 的根均为实根（$\mu_1,\mu-2,...,\mu_{p-1},0$）故 $p(x)=0$ 的根为 $-\mu_1,-\mu-2,...,-\mu_{p-1},0$ 也均为实根。由定理 5.12 知，序列 $f_1(G),f_2(G),...,f_p(G)$ 是强 log 凹的。

（c）略

9、（证明好像有问题）由 A 是图 G 的邻接矩阵，设 A 的特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_p$ 则：

$$tr(A^n)=\lambda_1^p+\lambda_2^p+...+\lambda_p^n.$$

由第一章游动计数可知，$f_G(n)=tr(A^n)$ 为图 G 中的闭游动的总数。而由 G 是点传递图，对任意 $u,v\in V$，存在自同构 φ，使得 $\varphi(u)=v$，故在某种意义下，图 G 的顶点是“对称的”，或者说图 G 的顶点“地位”相同，因此在对图 G 的闭游动计数时，$f_G(n)=p\cdot k$，其中 k 为某个整数，因此 $tr(A^n)$ 可以被 p 整除。

注：对称图一定是点传递图，点传递图不一定是对称图，弧对称图与对称图等价。

10、（a）略

（b）略

11、（a）略

（b）略

12、若已知 $f_S(p) = kp^{p-k-1}$ 成立，则对 $[p]$ 上恰有 k 个连通分支的有根森林的个数为 $f_k(p)$ 可分两步得到，第一步：从 $[p]$ 中选出 k 元子集 S，有 $\binom{p}{k}$ 种选择方案。第二步：计数恰有 k 个分支，根子集为 S 的有根森林的个数。故：

$$\begin{aligned} f_k(k) &= \binom{p}{k} \cdot f_S(p) = k\binom{p}{k} p^{p-k-1} \\ &= \frac{p!k}{k!(p-k)!}\frac{1}{p} \cdot p^{p-k} \\ &= \binom{p-1}{k-1} p^{p-k} \end{aligned}$$

下证：$f_S(p) = k \cdot p^{p-k-1}$.

见下图：

12 $S\subseteq[p]$, $\#S=k$.

$f_S(p)$: $[p]$上的有k个连通分支且根集为S的有根森林的个数.

$f_k(p)$: $[p]$上的恰有k个连通分支的有根森林的个数.

pf. $f_S(p)=kp^{p-k-1}$. 对给定的S, 令$\tilde{P}$: $[p]$上的至多有k个连通分支且根集为S的子集的有根森林的集合.

约定: 顶层为第1层. 则第j层的元素有$p-j$条边, $1\le j\le k$.

两种方法计数极大链的条数.

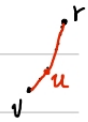
(1) 底层.

(2) 顶层.

$$\left.\begin{aligned}&f_S(p)\cdot p(k-1)\cdot p(k-2)\cdot\cdots\cdot p\cdot 1=f_S(p)\cdot p^{k-1}\cdot(k-1)!\\&k\cdot K(K_p)\cdot(k-1)\cdot(k-2)\cdots 1=k\cdot p^{p-2}\cdot(k-1)!\end{aligned}\right\}\Rightarrow f_S(p)=k\cdot p^{p-k-1}.$$

设$F\in\tilde{P}$有j个连通分支, 根集为S'. $\#S'=j$

选择边uv使删掉uv并将v作为新分支的根的森林$F'\in\tilde{P}$. 即$v\in S\setminus S'$, 则v有$k-j$种选择. 而u由v唯一确定. 故F覆盖$k-j$个元素.



$f_k(p)=\binom{p}{k}\cdot f_S(p)=k\binom{p}{k}p^{p-k-1}=p\binom{p-1}{k-1}\cdot p^{p-k-1}=\binom{p-1}{k-1}p^{p-k}$.

10 第十章 欧拉有向图和定向树

1、（a）（法一：直接讨论）由题意，可知 D 是连通，平衡的，故 D 是欧拉有向图，而 $\tau(D,v)$ 的个数与 v 的选取无关，不妨令 $v=v_1$，则以 v_1 为根的定向树，只能为：$v_p\to v_{p-1}\to...\to v_2\to v_1$，从而 $v_2\to v_1$ 有 a_1 种选择，...，$v_{i+1}\to v_i$ 有 a_i 中选择，$1\leqslant i\leqslant p-1$，因此 $\tau(D,v)=\tau(D,v_1)=a_1a_2...a_{p-1}$。

（法二：利用行列式计算）由有向图 D 的拉普拉斯矩阵为：

$$L(D)=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & & & & & \\ -a_1 & a_1+a_2 & -a_2 & & & & \\ & -a_2 & a_2+a_3 & -a_3 & & & \\ & & & ... & & & \\ & & & & ... & & \\ & & & & -a_{p-2} & a_{p-2}+a_{p-1} & -a_{p-1} \\ & & & & & -a_{p-1} & a_{p-1} \end{pmatrix}_{p\times p}.$$

故：

$$\begin{aligned}\tau(D,v)&=|L_0(D)|\\ &=\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & & & & \\ -a_1 & a_1+a_2 & -a_2 & & & \\ & -a_2 & a_2+a_3 & -a_3 & & \\ & & & ... & & \\ & & & & ... & \\ & & & & -a_{p-2} & a_{p-2}+a_{p-1} \end{bmatrix}\\ &=\begin{bmatrix} a_1 & -a_1 & & & & \\ 0 & a_2 & -a_2 & & & \\ & 0 & a_3 & -a_3 & & \\ & & & ... & & \\ & & & & ... & \\ & & & & 0 & a_{p-1} \end{bmatrix}\\ &=a_1a_2...a_{p-1}.\end{aligned}$$

（b）由公式：

$$\epsilon(D,e)=\tau(D,u)\prod_{u\in v}(outdeg(u)-1)!$$

$=a_1a_2...a_{p-1}(a_1-1)!(a_1+a_2-1)!(a_2+a_3-1)!\cdots(a_{p-2}+a_{p-1})!(a_{p-1})!.$

2、对 n 次 d 元 de Bruijn 序列个数的求解可仿照 n 次二元 de Bruijn 序列个数的求解；计数 d 元 de Bruijn 序列的方法是建立他们和 n 次 d 元 de Bruijn 图的有向图 $D(n,d)$ 的欧拉环游之间的对应，令图 $D(n,d)$ 有 d^{n-1} 个顶点,取为 d^{n-1} 个 $n-1$ 长的 d 元序列。一对顶点 $(a_1a_2...a_{n-1}, b_1b_2...b_{n-1})$ 构成 $D(n,d)$ 的一条边当且仅当 $a_2a_3...a_{n-1} = b_1b_2...b_{n-2}$，即 e 是一条边，如果 $init(e)$ 的后 $n-2$ 项与 $fin(e)$ 的前 $n-2$ 项一致，因此每个顶点 $u \in v$，$outdeg(u) = indeg(u) = d$（$*a_2a_3...a_{n-1}$，$*$ 处有 d 种选择）。从而 D 是平衡的，由每个顶点相关联的边为 $2d$，共 d^{n-1} 个顶点，故由握手定理，共有 $\frac{d^{n-1}\cdot 2d}{2} = d^n$ 条边，且 $D(n,d)$ 是连通的，由二元 de Bruijn 序列与其对应的 $deBruijn$ 图中的欧拉环游一一对应，同理对 d 元 de Bruijn 序列也是有一一对应关系，因此可对图 $D(n,d)$ 可求 $\tau(D,v)$，再求 $\epsilon(D,e)$.

引理：设 u，v 是 $D(n,d)$ 的任意两个顶点，则从 u 到 v 的长为 $n-1$ 的有向路存在且唯一。

证明：令 $u = a_1a_2...a_{n-1}, v = b_1b_2...b_{n-1}$，则：

$$u = a_1a_2...a_{n-1} \to a_2a_3...a_{n-1}*_1 \to a_3a_4...a_{n-1}*_1*_2 \to ... \to *_1*_2...*_{n-1}$$

故有 $*_i = d_i$，得证。

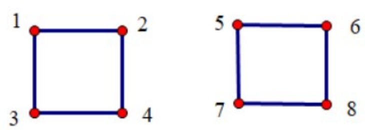
定理：$L(D(n,d))$ 的特征值是 0（1 重）和 d（$d^{n-1}-1$ 重）

证明：令 A 为有向邻接矩阵，由引理 $A^{n-1} = J$（$d^{n-1} \times d^{n-1}$ 的全 1 矩阵），由 J 的特征值为 d^{n-1}（1 重）与 0（$d^{n-1}-1$ 重），故 A 的特征值为 $d\zeta$（1 重，ζ 是一个特定 $n-1$ 次单位根）与 0（$d^{n-1}-1$ 重），由 A 有 d 个环，故 A 的迹为 d，故 $\zeta = 1$，由 $L(D) = dI - A$，故 L 的特征值为 0（1 重）与 d（$d^{n-1}-1$ 重）得证。

由公式：以 n 个 0 开始的 n 次 d 元 de Bruijn 序列的个数为：

$$\begin{aligned}\epsilon(D,e) &= \tau(D,u)\prod_{u\in v}(outdeg(u)-1)! \\ &= \frac{1}{d^{n-1}}\cdot d^{d^{n-1}-1}\prod_{u\in v}(outdeg(u)-1)! \\ &= d^{d^{n-1}-n}\cdot[(d-1)!]^{d^{n-1}}.\end{aligned}$$

3、题目少了一个条件：图 G 的连通性。例如下图：



是 8 个顶点，8 条边，无自环的 2 度正则图。

（a）显然由握手定理有 $\frac{pd}{2}=q$，即：$pd=2q$.

（b）由题意，A 是非负矩阵。且由图 G 的邻接矩阵 A 不可约 $\Leftrightarrow G$ 是连通的，且不是一个孤立顶点。则由 Perron-Frobenius 定理（P19）可知，A 的特征值存在且大于 0，记为 λ_{max}。考虑闭游动的条数：从 v_i 出发长为 l 的游动条数 $=d^l$，故闭游动的条数 $\leqslant p\cdot d^l$。由 $\sum_{i=1}^{p}\leqslant p\cdot d^l$，可得：$\lambda_i\leqslant d$（若否，存在 $\lambda_i>0$，则令 $l\to\infty$，矛盾），且存在图 G（如 K_p），其 λ_{max} 可以取到 d，故 $\lambda_{max}=d$.
(注：后来作者发现证明有问题，应该证明对所有的图 G，$\lambda_i\leqslant d$，等号都可以取到. 见下述。)

考虑 G 的拉普拉斯矩阵 $L(G)=dI-A$. $L(G)$ 的特征值为 $d-\lambda_i$ 均非负，且 $L(G)$ 的行和列和均为 0，故必存在 0 特征值。从而必有 $\lambda_{max}=d$.

（c）若 G 无重边，则 G 中长为 2 的闭游动个数为 $pd=2q$。

（d）由 G 中长为 l 的闭游动的个数为：$6^l+2\cdot(-3)^l$. 当 $l=2$ 时，得 $pd=2q=36+2\cdot 9=54$,可得 $q=27$。且由 $pd=54=2\times 27=3\times 18=6\times 9$（$pd=1\times 54$ 显然不可能），由 G 无重边无自环，可知 $p>d$，则有：

d	p
2	27
3	18
6	9

又由 (b) 有 $\lambda_i\leqslant d$，由（d）的条件知 $6\leqslant d$，故唯一的可能为：$d=6,p=9,q=27$. 由：

$$f_G(l)=\lambda_1^l+\lambda_2^l+...+\lambda_p^l=6^l+2\cdot(-3)^l.$$

故 G 的特征值为：$6,-3,-3,0,0,0,0,0,0$，由 G 是 d 度正则的可得：

$$\kappa(G)=\frac{1}{p}(d-\lambda_1)(d-\lambda_2)...(d-\lambda_{p-1})=\frac{1}{9}\cdot 9\cdot 9\cdot 6^6=9\cdot 6^6.$$

（e）由题意：要求 G 中闭游动沿着 G 的每条边每个方向恰好走一次的个数，实质上是求一个图 $\widehat{G}$ 的欧拉环游的个数。由 G 是连通无自环的无向图，则 $\widehat{G}$ 为将 G 中的每条边 e（$\varphi(e)=\{u,v\}$）替换为一对满足 $\widehat{\varphi}(e')=(u,v)$ 和 $\widehat{\varphi}(e'')=(v,u)$ 的有向边 e' 和 e'' 的有向图。故 $\widehat{G}$ 是平衡连通的，且在此题中，对任意 $u\in V$，$outdeg(u)=d$，由例 10.6，矩阵树定理为定理 10.4 的推论；有 $L(G)=L(\widehat{G})$ 因此:

$$\tau(\widehat{G},v)=detL_0(G)=detL_0(\widehat{G})=\kappa(G).$$

由（d）有 $\kappa(G)=9\cdot 6^6$，因此：

$$\epsilon(\widehat{G},v)=\tau(\widehat{G},v)\cdot\prod_{u\in V}(outdeg(u)-1)!=9\cdot 6^6[(d-1)!]^p.$$

由（d）有 $p=9,d=6$，因此 $\epsilon(\widehat{G},v)=9\cdot 6^6\cdot(5!)^9$.

4、略

由于 $\epsilon(G,v)=\tau(G,v)\cdot\prod_{u\in V}(outdeg(u)-1)!$，故有 $outdeg(u)-1=1\ or\ 0$，故 $outdeg(u)=1\ or\ 2$（对任意 $u\in V$），故题目意味着在求满足 $outdeg(u)=1\ or\ 2$ 的 p 个顶点平衡有向图，且 $\tau(D,v)=1$ 的图有多少个？

5、由题意可知，图 D 是有 p 个顶点，$2d$ 正则的，对任意 $u\in V$ 有 $outdeg(u)=indeg(v)=d$，图 D' 是有 p 个顶点，$4d$ 正则的，对任意 $u\in V$ 有 $outdeg(u)=indeg(v)=2d$，由

$$\epsilon(D,v)=\tau(D,v)\cdot\prod_{u\in V}(outdeg(u)-1)!=det(L_0(D))\cdot((d-1)!)^p.$$

由 D' 是 D 中每条边加倍所得的图，故 $L(D')=2L(D)$，因此：

$$detL_0(D')=2^{p-1}detL_0(D).$$

故：

$$\begin{aligned}\epsilon(D',e')&=\tau(D',v)\cdot\prod_{u\in V}(outdeg(u)-1)!\\&=det(L_0(D'))\cdot((2d-1)!)^p\\&=2^{p-1}detL_0(D)\cdot((2d-1)!)^p\\&=2^{p-1}\cdot\frac{[(2d-1)!]^p}{[(d-1)!]^p}\cdot\epsilon(D,e).\end{aligned}$$

6、(a) 由 l 是一个固定正整数，故有 $A^l=J$（J 为全 1 的 p 阶矩阵），由于 J 的特征值为 p（1 重），0（$p-1$ 重）。可得 A 的特征值为：$\sqrt[l]{p}\cdot\zeta$（1 重），0（$p-1$ 重）；其中 ζ 为 l 次单位根。（注：若 A 是实对称矩阵，则 A 的特征值一定为实数，但此时 A 为有向邻接矩阵，暂时无法确定其是否对称）又由 $tr(A)=0\times(p-1)+\sqrt[l]{p}\cdot\zeta=$ 非负整数 (A 的对角线元素和)，故 $\zeta=1$，$\sqrt[l]{p}$ 为正整数。因此 A 的特征值为：$\sqrt[l]{p}$（1 重），0（$p-1$ 重）

(b) 由 D 的自环个数等于 D 的有向邻接矩阵对角线元素和，故 D 有 $\sqrt[l]{p}$ 个自环。

(c)（未证完）由于对 D 的每个顶点对 u,v，从 u 到 v 长为 l 的有向游动存在且唯一。故 D 是连通的。设 E 是 $A(D)$ 的对应最大特征值的列特征向量，故 $A\cdot E=\sqrt[l]{p}\cdot E$，由于 $(A\cdot E)^t=(\sqrt[l]{p}\cdot E)^t$，得：$E^t\cdot A^t=\sqrt[l]{p}\cdot E^t$，得：

$$E^t\cdot A^t\cdot E=\sqrt[l]{p}\cdot E^t\cdot E=E^t(\sqrt[l]{p}\cdot E).$$

又由 A 是 D 的有向邻接矩阵知：A 是非负的，且由 D 是连通的得 A 是不可约矩阵。故由 Perron-Frobenius 定理，存在对应于 $\sqrt[l]{p}$ 的所有元均为正数的特征向量，且该向量在相差一个正实数倍的意义下唯一，不妨令 E 为此向量，由 $E^t(A^tE-\sqrt[l]{p}E)=0, E^t=(*_1,*_2,...,*_p), *_i>0,\ 1\leqslant i\leqslant p$ 得：$A^tE=\sqrt[l]{p}E=AE$（从这一步中还不能得到 $A^t=A$，例如 $(-1,1)(1,1)^t=0$）需证明：

$$A\begin{pmatrix}1\\1\\..\\1\end{pmatrix}=A^t\begin{pmatrix}1\\1\\..\\1\end{pmatrix}.$$

（d）（未证完）要证 $outdeg(u)=indeg(u)=d$，对任意 $u\in V$，由于 D 已经是平衡的，故只需证对任意的顶点有相同的出度或相同的入度即可。（怎么证？）

若已知对任意 $u\in V$ 有 $outdeg(u)=indeg(u)=d$，由取一点 $v_1\in V$ 从 v_1 出发长为 l 的有向游动为 d^l(因为每一点的出度都是 d)，另一方向，从 v_1 到任意顶点长为 l 的有向游动存在且唯一，而 D 有 p 个顶点，故 $d^l=p$。

（e）由 $A(D)$ 的特征值为 $\sqrt[l]{p}=d$（1 重），0（$p-1$ 重），而 $L(D)=dI-A(D)$，故 $L(D)$ 的特征值为：0（1 重），d（$p-1$ 重）。因此：$\tau(D,v)=\frac{1}{p}\cdot d^{p-1}$ 故：

$$\epsilon(D,v)=\tau(D,v)\cdot\prod_{u\in V}(outdeg(u)-1)!=\frac{1}{p}\cdot d^{p-1}[(d-1)!]^p.$$

（f）存在一个 9 个顶点的非 de Bruijn 图的例子（证明？），而显然 9 个顶点的 de Bruijn 图满足 6 题的所有条件。

7、（a）当 $n\geqslant 3$ 时，$n!\geqslant 2n$，由于 $[n]$ 的排列有 $n!$ 个，而序列 $a_1a_2...a_{n!}$ 恰有 $n!$ 个起始位置的 n 长循环因子。不妨设这个序列存在，在模 $n!$ 运算下，由于 $123...n$ 为 $[n]$ 个的一个排列，故总可以令 $12...n$ 为这个序列的前 n 项，由

$$123...n\underline{*_1}\ \underline{*_2}...\underline{*_n}......$$

由 $n!$ 个起始位置开始的循环因子（长为 n）与 $n!$ 个排列一一对应。可知这个序列第 $n+1$ 项 $*_1=1$，否则从 2 开始的循环因子 $23...n*_1$，不是 $[n]$ 的排列。同理 $*_2=2,*_3=3,...,*_n=n$ 以此类推，但此时 $*_1*_2...*_n=n$ 与 $12...n$ 排列相同（由 $n!\geqslant 2n$，可知 $*_1*_2...*_n=n$ 存在）矛盾，因此此序列不存在。

（b）（未证出）若给出一个构造出一个 G_n 万能圈的算法即可证明，或者单纯的证明存在性。

（c）由 $n=3$，故所有 $n-1$ 项的排列为：$12,13,21,23,31,32$。且 $n!=6$ 由以 $123*_1*_2*_3$ 可知 $*_1$ 可为 1 或 2，若 $*_1=1$，则唯一的可能为 $*_2=3,*_3=2$。若 $*_2=2$，则唯一的可能为 $*_2=1,*_3=3$，故以 123 开始的万能圈有 2 个，分别为 123132,123213.

注：实际上 $n=3$ 的万能圈共 3 个，另一个为 121323（在等价的意义下），因为在取模条件下，总可以以 12 开始，第 3 个位置为 3 的已讨论，又不可以为 2，故只能为 1，唯一的结果为 121323。

（d）未解决问题

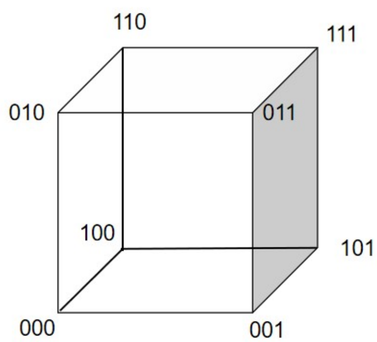
11　第十一章　圈，键和电子网络

1、（a）由 C_n 的生成方式可知，C_n 中的每个顶点与 n 个顶点相连，由握手定理，C_n 中共有 $\frac{2^n \cdot n}{n} = 2^{n-1} \cdot n$ 条边，由

$$dim\beta = p - k = 2^n - 1.$$

$$dimC = q - p + k = 2^{n-1} \cdot n - 2^n + 1 = 2^{n-1}(n-2) + 1.$$

由引理 $11.40 \neq f \in C$，则 $||f||$ 包含一个无向圈，由 C_n 是二部图，二部图只存在偶圈，而在 C_n 中三条边不能构成一个回路，故不存在一个三条边上的环流。



C_3

（b）略

2、本身作为无向图是树的有向图，本身作为无向图是森林的有向图具有这样的性质“每个非空边子集是一个割集”。

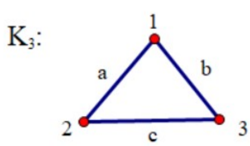
“森林”⇔“无回路”⇔“一些树的无交并”

3、由键 ⇔ 极小割集。设集合 A 为满足题目要求的集合，即 A 中不包含键，且边集最多。即：$K_p \setminus A$ 仍是连通的，若要 A 所含元素最多，则 $K_p \setminus A$ 为一棵数，故：

$$\#A = \frac{p(p-1)}{2} - (p-1) = \frac{(p-2)(p-1)}{2}.$$

故最多包含 $\frac{(p-2)(p-1)}{2}$ 条边。这样的集合有 $\kappa(K_p) = p^{p-2}$ 个。

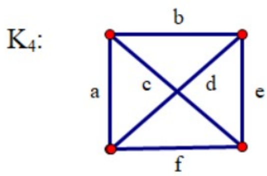
例如：对 K_3，有 $A = \{a\}, \{b\}, \{c\}$，$p^{p-2} = 3^{3-2} = 3$ 个。



对 K_4，有

$$\begin{aligned} A = &\{acd\},\{cde\},\{ace\},\{ade\},\\ &\{cdf\},\{cdb\},\{bcf\},\{bdf\},\\ &\{acf\},\{def\},\{bde\},\{abd\},\\ &\{abe\},\{bef\},\{afe\},\{abf\}, \end{aligned}$$

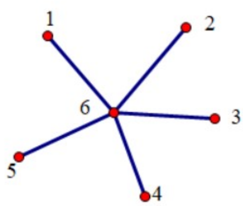
$p^{p-2}=4^2=16$ 个。



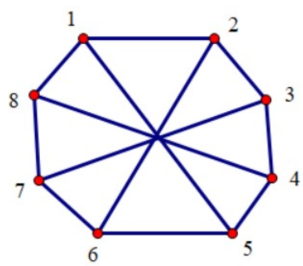
4、略

5、（a）反例：

边传递图但不是点传递图：星图，如下：



点传递图但不是边传递图：



显然此图是点传递图,但不是边传递图:以边 1——2 为例,包含 1——2 的长为 4 的回路,只有 1 个,即:1——2——6——5——1;但再看边 1——5;包含边 1——5 的长为 4 的回路有两个，即：1——5——6——2——1，1——5——4——8——1；因此不存在边 1——2 至边 1——5 的同构映射，因此此图不是边传递的。

（b）由：

$$R(D)=-\frac{1}{I_q}=\frac{\text{包含边 e 的生成树个数}}{\text{不包含边 e 的生成树个数}}.$$

令 x 为包含边 e 的生成树个数，y 为不包含边 e 的生成树个数，则：$R(D)=\frac{x}{y}$，令这 q 条边分别为 $e_1,e_2,...,e_q$，令 x_i 为包含边 e_q 的生成树个数，由于图 G 是边传递的，故 $x_1=x_2=...=x_q$，由一个树包含 $p-1$ 条边，则：

$$\frac{x\cdot q}{p-1}=\kappa(G)=x+y.$$

得：$\frac{x}{y}=\frac{p-1}{q-p+1}$.

6、（a）由 D 是有 q 条边的无自环连通图，设 D 有 p 个顶点。则：$dim\mathcal{B}=p-1$，$dim\mathcal{C}=q-p+1$ 由引理 11.6，$B[S]$ 列向量线性无关当且仅当 S 是无圈的，又由 $dim\mathcal{B}=p-1$，则 S 是有 $p-1$ 条边的无圈图，因此 S 是一课数。故由 Binet-Cauchy 定理：

$$detBB^t=\sum_S(detB[S])(detB^t[S]),$$

其中 S 遍历 D 的边集的所有 $p-1$ 元子集，又由于 $A^t[S]=A[S]^t$，因此：

$$detBB^t=\sum_S(detB[S])^2.$$

由定理 11.13$\mathcal{B}$ 的基矩阵 B 的幺模性，当 S 是某个树的边时，$detB[S]=\pm1$，其他情况为 0，此时在上式右边中当 S 构成 D 的一个生成树的边集时等于 1，其他情况为 0，故 $detBB^t=\kappa(D)$。

同理，由定理 11.6，$C[S]$ 列向量线性无关当且仅当 S 不包含键，由定理 11.13 定理证明过程 $detC_T[T_1^*]=\pm1$，当且仅当 T_1^* 为一棵余树，因此：

$$detCC^t=\sum_S(detC[S])(detC^t[S])=\sum_t(detC[S])^2,$$

其中 S 遍历 D 的边集的所有 $q-p+1$ 元子集，当 S 是一棵树的余树时，$detC[s]=\pm1$，其余情况为 0，因此 $detCC^t=\kappa(D)$.

（b）由 $dimB=p-1,dimC=q-p+1$ 因此：$Z=\begin{pmatrix}C\\B\end{pmatrix}$ 是 $q\times q$ 的矩阵，且 $Z^t=(C^t,B^t)$ 故：

$$Z\cdot Z^t=\begin{pmatrix}C\\B\end{pmatrix}(C^t\ B^t)=\begin{pmatrix}CC^t & CB^t\\BC^t & BB^t\end{pmatrix}.$$

由 B 的行向量与 C 的行向量是正交的，因此 $CB^t=0,BC^t=0$ 故：

$$detZ\cdot Z^t=detCC^t\cdot detBB^t=(\kappa(D))^2.$$

又由 $detZ \cdot Z^t = (detZ)^2$，因此 $detZ = \pm\kappa(D)$.

7、略

8、由：

$$R(D) = -\frac{1}{I_q} = \frac{\text{包含边}e_q\text{的生成树个数}}{\text{不包含边}e_q\text{的生成树个数}} = \frac{\#[e_q \in T]}{\#[e_q \notin T]}.$$

上式中的 e 表示 e_q。故：

$$R(D^*) = -\frac{V_q^*}{I_q^*} = V_q^*(-\frac{1}{I_q^*}) = V_q^* \frac{\#[e_q^* \in T]}{\#[e_q^* \notin T]}.$$

由命题 11.18：集合 S 是 D 的生成树的边集 $\Leftrightarrow S^* = \{e^*, e \in S\}$ 是 D^* 的余树的边集。$e \in T \Leftrightarrow e^* \notin T$ 故：

$$\#[e_q \in T] = \#[e_q^* \notin T], \#[e_q \notin T] = \#[e_q^* \in T].$$

故：

$$R(D^*) = V_q^* \cdot \frac{1}{R(D)} = \frac{V_q^*}{R(D)}.$$

9、由方块划分的长方形的增广 Smith 图中边的定义可知：设新增边 e_1.

$$\begin{aligned} I :& E \to R \\ & I_e \mapsto \text{边 e 的对应正方形边长} \\ & I_{e_1} \mapsto -a \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V :& E \to R \\ & V_e \mapsto \text{边 e 的对应正方形边长} \\ & V_{e_1} \mapsto -a \end{aligned}$$

故：

$$< I, V >= \sum_{e \in E} I(e)V(e) = \sum_{e \in E \setminus e_1} I(e)V(e) - ab = \sum_{e \in E \setminus e_1} I^2(e) - ab = 0.$$

"几何意义"：方块划分的长方形中，所有内部小正方形的面积和等于长方形的面积和。

10、由 D 是方块划分的 $a \times b$ 长方形的增广 Smith 图，对连接两极的新边 e_1 规定 $I_{e_1} = b \ \ V_{e_1} = -a$ 则 Kirchhoff 的两个法则对所有顶点成立，又由对 e_1 外的边 $R_e = 1$ 将此图看做平面电子网络，故由推论 11、15 有：

$$R(D) = \frac{\text{包含边}e_1\text{的生成树个数}}{\text{不包含边}e_1\text{的生成树个数}} = \frac{\#[e_1 \in \kappa(D)]}{\#[e_1 \notin \kappa(D)]}.$$

又由 $R(D)=-\frac{V_{e_1}}{I_{e_1}}=\frac{a}{b}$ 由此存在某个正整数 k，使得：

$$\#[e_1 \in \kappa(D)]=ka,\ \#[e_1 \notin \kappa(D)]=kb,\ \kappa(D)=ka+kb=k(a+b)$$

故：$(a+b)|\kappa(D)$.

12 第十二章 代数组合中的杂项珍宝

1、由 12.1 节知，当 $\alpha = \frac{1}{2}$ 时，策略在 $n \to \infty$ 时，可以达到 30% 的获胜机会。因此，要想达到 50% 的获胜机会，需要 $\alpha > \frac{1}{2}$，因此有 $2\alpha n > n$，再利用 12.1 节的获胜策略，则获胜成功率为：

$$1 - \sum_{r=2\alpha n+1}^{2n} \frac{1}{r} = 1 - \sum_{r=1}^{2n} \frac{1}{r} + \sum_{r=1}^{2\alpha n} \frac{1}{r}.$$

由：

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sum_{r=1}^{n} \frac{1}{r} - \log \alpha \right) = \gamma,$$

其中 γ 为欧拉常数，故当 $n \to \infty$ 时，获胜成功率为：

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \left(1 - \sum_{r=2\alpha n+1}^{2n} \frac{1}{r} \right) &= \lim_{n\to\infty} \left(1 - \sum_{r=1}^{2n} \frac{1}{r} + \sum_{r=1}^{2\alpha n} \frac{1}{r} \right) \\
&= \lim_{n\to\infty} (1 - \log 2n + \log 2\alpha n) \\
&= 1 - \log \frac{1}{\alpha} = 1 + \log \alpha = 50\%.
\end{aligned}$$

故 $\log \alpha = -0.5$，$\alpha = \frac{1}{\sqrt{e}} \approx 0.6065$ 因此在 $\alpha = \frac{1}{\sqrt{e}}$ 时，策略在 $n \to \infty$ 时可达到 50% 的获胜机会。

2、(未完) 一个策略：同 12.1 节，给囚犯们分派数字 $1, 2, 3, ..., 100$ 每名囚犯分派不同的数字，排成一排的盒子从左到右用 $1, 2, ..., 100$ 标号，拥有数字 k 的囚犯打开除盒子 k 以外的所有盒子，共 99 个。因为要让所有的囚犯都尽可能的看不到自己的名字，故一个策略可以成功，每名囚犯都要打开 99 个盒子。

此策略成功的概率：任何一名囚犯都看不到自己的名字，只有盒子 k 中的标号为数字 k，因此成功的概率为 $\frac{1}{100!}$

（此策略是否最优，如何证明？若否，最优策略是何?）

3、（a）若所有囚犯同时随机选取一个颜色。则其成功概率为 $\frac{1}{2^{100}}$，又因为每个人每次猜对自己头上帽子颜色的概率均为 $\frac{1}{2}$，故成功概率为：$\frac{1}{2^{100}} \leqslant p \leqslant \frac{1}{2}$ 记：红帽子为 0，蓝帽子为 1. 记每个囚犯对应颜色的数字为 $a_1, a_2, ..., a_{100}$，$a_i \in \{0, 1\}$ 则令:

$$S = a_1 + a_2 + ... + a_{100}.$$

故 a_i 看到的数字和为 $S - a_i$ 于是当 a_i 猜自己帽子的颜色为红（当 $-(S - a_i) \mod 2 = 0$ 时）；为蓝（当 $-(S - a_i) \mod 2 = 1$ 时）。因此当 $S \equiv 0($

mod 2) 时，他们同时猜对自己头上帽子的颜色，当 $S \equiv 1(\mod 2)$ 时，他们同时猜错自己头上帽子的颜色。故：$p = \frac{1}{2}$.

（b）略

4、略

5、（a）证明同定理 12.2 设有 k 个社团，定义二元域 F_2 上的关联矩阵 $M = (M_{ij})$，M 的行用社团 C_i 依次标记，列用反 odd town 的居民 x_j 依次标记，令：

$$M_{ij} = \begin{cases} 1 & x_j \in C_i; \\ 0 & \text{其他}. \end{cases}$$

则 M 的一行和为偶数，令 $A = MM^t$ 为 $k \times k$ 矩阵，由于每个社团有偶数个成员，故 A 的主对角线元素为 0，由每个社团有奇数个公共成员，故 A 的非对角线元素都为 1，从而 $A = J - I$，其中 J 为 $k \times k$ 全 1 矩阵，I 为 $k \times k$ 单位矩阵，故 $rank(A) = k$，因此：

$$n \geqslant rank(M) \geqslant (MM^t) = rank(A) = k.$$

故至多可以组成 n 个社团。

（b）略

6、（a）作者认为题目有误，最大社团数应为 $2^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} - 1$:

例：a, b, c 三个，满足条件的社团为：$\{a, b\}$，而 $2^{\lfloor \frac{3}{2} \rfloor} = 2$

再例：a, b, c, d, e 五人，满足条件的社团为：$\{a, b\}, \{c, d\}, \{a, b, c, d\}$ 而 $2^{\lfloor \frac{5}{2} \rfloor} = 4$

证明：由偶数镇有 n 个人，由于每个社团有偶数个人，最小的非 0 偶数为 2. 则这 n 个人可以组成 $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ 个，有两个人的社团，且显然，这 $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ 个社团两两无交，令 $m = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$，则有 4 个人的社团，有 $\binom{m}{2}$ 个，有 6 个人的社团有 $binomm3$ 个，依次类推... 可以组成的社团数为：

$$\binom{m}{1} + \binom{m}{2} + \binom{m}{3} + ... + \binom{m}{m} = 2^m - 1 = 2^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} - 1$$

由组建过程，显然是最大社团数。

（b）略

7、证明：定义二元域 F_2 上的关联矩阵 $M = (M_{ij}), N = (N_{ij})$，$M, N$ 的行分别用社团 $R_1, R_2, ..., R_m$ 与 $B_1, B_2, ..., B_m$ 依次标记，列用居民 x_j 依次标记，令：

$$M_{ij} = \begin{cases} 1 & x_j \in R_i; \\ 0 & \text{其他}. \end{cases}$$

$$N_{ij} = \begin{cases} 1 & x_j \in B_i; \\ 0 & \text{其他}. \end{cases}$$

则由于对每个 i 有 $\#(R_i \cap B_i)$ 是奇数，则 $M \cdot N^t$ 的主对角线元素为 1，由对 $i \neq j$ 有 $\#(R_i \cap B_j)$ 是偶数，则 $M \cdot N^t$ 的其他元素均为 0. 故 $M \cdot N^t = I_{m\times m}$，由:

$$m = rank(M \cdot N^t) \leqslant rank(M) \leqslant n.$$

得证。

8、证明：定义三元域 F_3 上的关联矩阵 $M = (M_{ij})$，M 的行用社团 $C_1, C_2, ..., C_k$，依次标记，列用居民 x_j 依次标记，令:

$$M_{ij} = \begin{cases} 1 & x_j \in C_i; \\ 0 & \text{其他}. \end{cases}$$

现考虑 MM^t 为 $k \times k$ 矩阵，由任意两个不同的社团有 3 的倍数个公共成员，故 MM^t 中除对角线外其他位置在 F_3 中均为 0. 由题意，对角线位置上有 $j(\leqslant k)$ 个位置不为 0. 故：

$$j = rank(M \cdot M^t) \leqslant rank(M) \leqslant n.$$

得证。

9、证明：定义二元域 F_2 上的关联矩阵 $M = (M_{ij})$，M 的行用社团 $C_1, C_2, ..., C_k$ 依次标记，列用居民 x_j 依次标记。令：

$$M_{ij} = \begin{cases} 1 & x_j \in C_i; \\ 0 & \text{其他}. \end{cases}$$

现考虑 MM^t 为 $k \times k$ 矩阵，则：

$$M \cdot M^t = \begin{pmatrix} & & & & 1 \\ & 0 & & 1 & \\ & & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & & \\ & 1 & & 0 & \\ 1 & & & & \end{pmatrix}_{k\times k}.$$

故：$k = rank(M \cdot M^t) \leqslant rank(M) \leqslant n$ 得证。

10、定义二元域 F_2 上的关联矩阵 $M = (M_{ij})$,M 的行为社团 $C_1, C_2, ..., C_k$ 依次标记，列用居民 x_j 依次标记。令：

$$M_{ij} = \begin{cases} 0 & x_j \in C_i; \\ 1 & \text{其他}. \end{cases}$$

则：

$$M \cdot M^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & \\ 1 & 0 & 1 & & & \\ & 1 & 0 & 1 & & \\ & & & \cdots & & \\ & & & & 0 & 1 \\ & & & & 1 & 0 \end{pmatrix}_{k\times k}$$

故:

$$rank(MM^t) = \begin{cases} k & k \text{ 为偶数;} \\ k-1 & k \text{ 为奇数.} \end{cases}$$

由 $rank(M \cdot M^t) \leqslant rank(M) \leqslant n$ 作为关于 n 的函数，当 k 为偶数时，k 的最大可能是 $\leqslant n$ 的最大偶数，当 k 为奇数时，k 的最大可能是 $\leqslant n+1$ 的最大奇数。

11（a）由 $|A| = |A^t| = |-A| = (-1)^n|A|$，当 n 为奇数时，$|A| = -|A|$，故 $|A| = 0$

（b）略，或许与奇邻域覆盖有关。

12、现考虑斜对称矩阵的特征值：令 A 为斜对称矩阵，其特征值为 $\lambda = a + bi$，相应特征值向量为 $x = u + vi \neq 0$，其中 u, v 为非 0 实向量，故 $Ax = \lambda x$，$A(u + vi) = (a + bi)(u + vi)$ 即：

$$Au + iAv = (au - bv) + (bu + av)i.$$

则有：

$$\begin{cases} Au = au - bv, \\ Av = bu + av. \end{cases}$$

故：

$$u^T Au = au^T u - bu^T v, \quad v^T Av = bv^T u + av^T v.$$

则：

$$u^T Au + v^T Av = au^T u + av^T v = a(|u|^2 + |v|^2).$$

由于 $u^T Au$ 是一个数，故：

$$u^T Au = (u^T Au)^T = u^T A^T u = -u^T Au \Rightarrow u^T Au = -u^T Au.$$

于是 $u^T Au = 0$，同理 $v^T Av = 0$，因此：

$$u^T Au + v^T Av = a(|u|^2 + |v|^2) = 0.$$

由：

$$u + vi \neq 0 \Rightarrow |u|^2 + |v|^2 \neq 0 \Rightarrow a = 0.$$

从而 $\lambda = bi,\ b \in R$ 因此斜对称矩阵的特征值为 0 或纯虚数，令 V' 是所有斜对称矩阵所构成的 M_n 的子空间。$dim(V \cap V') = 0$ 则：

$$dimV' = (n-1) + (n-2) + ... + 1 = \frac{(n-1)n}{2}.$$

故：

$$dimV \leqslant dimM_n - dimV' = n^2 - \frac{n(n-1)}{2} = \binom{n+1}{2}.$$

13、对定理 12.3 的证明，限制在二元域 F_2 中，

$$E(K_n) = E(B_1) \cup E(B_2) \cup ... \cup E(B_m).$$

同样对 B_k 的顶点二分为 (X_k, Y_k)，定义矩阵 A_k:

$$(A_k)_{ij} = \begin{cases} 1 & i \in X_k, j \in Y_k; \\ 0 & \text{其他}. \end{cases}$$

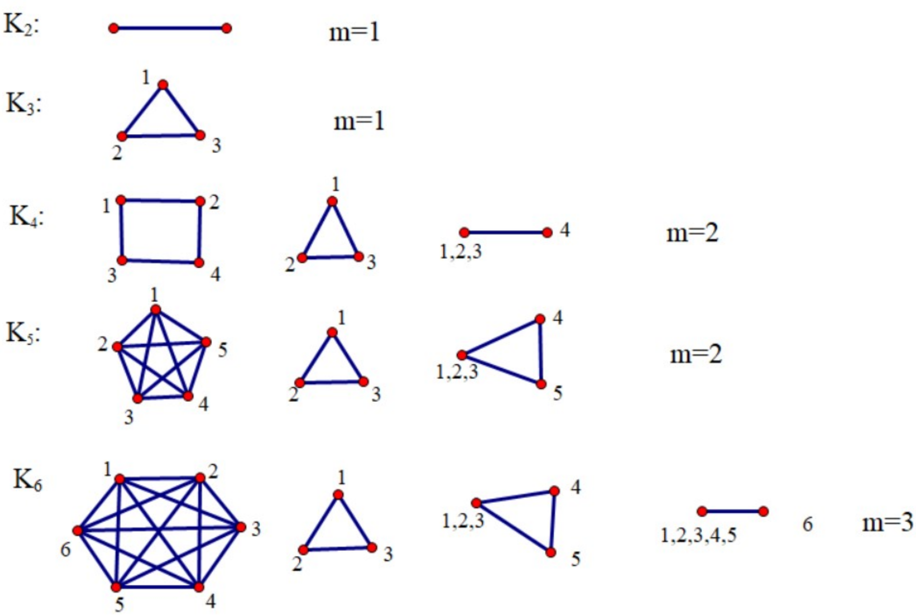
由于 K_n 的每条边被覆盖奇数次，故在 F_2 中，同样有 $S + S^t = J - I$ 故：

$$m \geqslant rankS \geqslant n - 1 \geqslant \frac{n-1}{2}.$$

注：（证明有误）题中的意思应该是存在 $m = \frac{n-1}{2}$ 的完全二部划分

14、（未证完）猜测：m 的最小值是 $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$

由题意完全三部图可以允许一个 X_i 为空集，此时为完全二部图。由定理 12.3 知，m 可以取到 $n-1$，但 m 应有更小的下界，令 x 是更小的下界。则：



同理，K_7 时有 $m=3$，K_8 时有 $m=4$，K_9 时有 $m=4$。因此 m 可以取到 $\lfloor\frac{n}{2}\rfloor$.

15、（非代数证明）定义关联矩阵：$M=(M_{ij})$ 为 $n\times n$ 的矩阵，行用 $A_1,A_2,...,A_n$ 标记，列用 $x_1,x_2,...,x_n$ 标记。其中：

$$M_{ij}=\begin{cases}1 & x_j\in A_i;\\ 0 & \text{其他}.\end{cases}$$

$A_i-\{x\}$ 意味着在 M 中删去 x 所在的列。利用数学归纳法证明：当 $n=2$ 时，由 A_1 与 A_2 互不相同，故 A_1 行必有元素与 A_2 行同一列元素不同，则保留这一列，删去另一列，A_1 与 A_2 所在行仍不同。假设：命题对 $n\times n$ 的矩阵 M 成立，现考虑 $(n+1)\times(n+1)$ 的关联矩阵，现删去第一列的元素，若每行互不相同，则成立。若其中有相同的行，则仅仅只能有两行相同，记为 A_i,A_j（否则若 A_i,A_j,A_k 三行相同，而第一列元素为 0 或 1，则在原矩阵中必有两行相同，矛盾）现删去 A_i 行，则得到 $n\times n$ 矩阵，由归纳假设，存在一列，不妨设为最后一列，删去后，剩下的 n 行都互不相同，此时在 $(n+1)\times(n+1)$ 的原矩阵中删去最后一列，由 $A_i-x=A_j-x$，故 A_i 与 A_j 所在行，均与剩下 $n-1$ 行互不相同。而 A_i 与 A_j 所在行在原矩阵中第一列必是一个为 0，一个为 1，因而也互不相同，故所有行在删去最后一列后，仍互不相同。得证。

（代数证明）：略

16、略

17、略

18、设矩阵 H 为 Hadamard 矩阵，其阶为 n，则当 $n=1$ 或 2 时，显然存在 Hadamard 矩阵：

$$(1),\quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

故设 $n \geqslant 3$ 令 $H=(h_{ij})$ 由 $n \geqslant 3$，且 $H \cdot H^t = nI$

$$\begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} & . & . & . & h_{1n} \\ h_{21} & h_{22} & . & . & . & h_{2n} \\ . & . & & & & . \\ . & . & & & & . \\ . & . & & & & . \\ h_{n1} & h_{n2} & . & . & . & h_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_{11} & h_{21} & . & . & . & h_{n1} \\ h_{12} & h_{22} & . & . & . & h_{n2} \\ . & . & & & & . \\ . & . & & & & . \\ . & . & & & & . \\ h_{1n} & h_{2n} & . & . & . & h_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n & & & & & \\ & n & & & & \\ & & . & & & \\ & & & . & & \\ & & & & . & \\ & & & & & n \end{pmatrix}.$$

因此：

$$\sum_{j=1}^{n} h_{1j}^2 = n,$$

$$\sum_{j=1}^{n} h_{1j}^2 = \sum_{j=1}^{n} (h_{1j}^2 + h_{1j} \cdot h_{3j} + h_{2j} \cdot h_{1j} + h_{2j} \cdot h_{3j}) = \sum_{j=1}^{n} (h_{1j}+h_{2j})(h_{1j}+h_{3j}).$$

故

$$\sum_{j=1}^{n} (h_{1j}+h_{2j})(h_{1j}+h_{3j}) = n.$$

又对任意 j，$h_{1j}+h_{2j}=0,\pm 2; h_{1j}+h_{3j}=0,\pm 2$ 因此上式中左边的每项求和是 4 的倍数，即：$4|n$ 得证。

19、略

20、略

21、略

22、略

23、（未证完）由从 $(0,0)$ 到 (n,n) 若使用 r 个对角步的 HVD 路径，必然用了 $n-r$ 个水平步，$n-r$ 个垂直步。H 代表水平步，V 代表垂直步，D 代表对角步。于是使用了 r 个对角步的 HVD 路径数为多重集合 $\{(n-r)\cdot H, (n-r)\cdot V, r \cdot D\}$ 的排列数，因此：

$$f(n) = \sum_{r=0}^{n} \frac{(2n-r)!}{((n-r)!)^2 \cdot r!} = \sum_{r=0}^{n} \begin{pmatrix} & 2n-r & \\ n-r & n-r & r \end{pmatrix}.$$

24、（a）令 $g(n)=\alpha_1^n$ 则 $g(n)-\alpha\cdot g(n-1)=0$ 故 $g(n)=\alpha_1^n\in\mathcal{P}$ 由 Q_1^n 为非 0 复多项式：故令:

$$Q_1(n)=c_qn^q+c_{q-1}n^{q-1}+...+c_1n+c_0,\ c_i\in\mathcal{C}.$$

对 n^q 有 $n^q-n\cdot q^{n-1}=0$ 故 $n^q\in\mathcal{P}$ 由定理 12.18 有 $Q_1(n)=\mathcal{P}$ 因此：$Q_1(n)\alpha_1^n\in\mathcal{P}$，再利用定理 12.18，有 $f(n)\in\mathcal{P}$。

（b）略

25、略

26、略

27、略

28、略